ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IX (1966)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

A. ROBINSON (Los Angeles)

Na pograniczu logiki i matematyki*)

I

Logika matematyczna, podobnie jak wiele innych dyscyplin naukowych, na przykład typu fizyki teoretycznej, jest dziedziną zastosowań metod matematycznych, stosuje się je przy tym do wyprowadzania wniosków, lub — bardziej ogólnie — „praw myślenia". Jednakże związki pomiędzy logiką i matematyką są dwustronne, ponieważ jednym z głównych zadań logiki jest zabezpieczenie podstaw matematyki, czy też dyskutowanie jej założeń, a więc w pewnym sensie także własnych założeń. Logika nabiera przez to określonych własności zwrotnych, co ma ważne konsekwencje.

Z pewnego punktu widzenia logika i matematyka w istocie pokrywają się, według innego wariantu tej samej opinii matematyka jest częścią logiki. Jednakże, dla celów praktycznych, matematykę i logikę można rozpatrywać jako różne, choć częściowo pokrywające się dyscypliny. W artykule tym rozpatrzymy pewne ich wzajemne relacje.

I

Powszechnie sądzi się, że jedną z wyróżniających cech współczesne matematyki jest jej wysoki stopień ogólności, związany z wprowadzeniem znacznego stopnia abstrakcji. Jednakże zarówno dążenie do wysokiego stopnia abstrakcji, jak i pojawienie się krytycznego stosunku do tej tendencji nie są czymś nowym w historii matematyki. W 1857 roku K. Weierstrass bronił nowoczesnych matematyków tamtego czasu przed tymi, którzy uważali „abstrakcjonistyczne skłonności" za całkowicie bezpłodne.

Obecnie matematyk może być raczej zaskoczony wiadomością, że takie dyskusje toczyły się zaledwie około stu lat temu. Prace Weierstrassa i jego współczesnych stanowią dla niego podstawę, na której oparte zostały współczesne ogólne teorie. Przypomnijmy sobie, że sto lat temu nowoczesne pojęcie teorii aksjomatycznej zaczynało się dopiero rozwijać. Teoria

*) Przekład artykułu *Between Logic and Mathematics*, ICSU Review of World Science 6(1964), str. 218-224.

mnogości była jeszcze w zarodku, a algebra i analiza koncentrowały się prawie wyłącznie na liczbach zespolonych i ich podsystemach. Pojawiające się zaczątki bardziej ogólnego podejścia nie umożliwiały podjęcia krytycznej dyskusji.

W każdym razie nie ulega wątpliwości, że tendencja matematyki do uogólniania i abstrakcyjności wzrosły ogromnie od czasów Weierstrassa. Przejawia się to na wielu różnych odcinkach. Na przykład, przy narodzinach teorii mnogości abstrakcja polegała na rozpatrywaniu wspólnych własności zbiorów, czy też rodzin przedmiotów, przy pominięciu własności przedmiotów jako takich. W algebrze uczyniono wielki krok w momencie przesunięcia uwagi z konstrukcji tworzonych w obrębie liczb zespolonych, lub powiązanych z nimi, na rozpatrywanie abstrakcyjnych struktur danych przez określające je systemy aksjomatów (np. grupy, pierścienie, ciała) i ich wzajemnych relacji. Najnowsze badania, które rozwinęły się pod wpływem topologii algebraicznej, dotyczą klas (kategorii) struktur spełniających pewne systemy aksjomatów. Prowadzi to do jeszcze wyższego stopnia abstrakcji, poprzez rozpatrywanie własności przekształceń pomiędzy strukturami należącymi do kategorii, bez odwoływania się, o ile jest to możliwe, do indywidualnych własności elementów tych struktur.

III

Pomijając pionierskie prace Leibniza, rozwój logiki matematycznej nastąpił w powyżej wspomnianym okresie. W początkowym etapie wiele uwagi zwracano na analogie pomiędzy operacjami logicznymi i arytmetycznymi. Uświadomiono sobie bardzo bliskie związki pomiędzy rachunkiem zdań i algebrą zbiorów. Przy końcu dziewiętnastego wieku wysiłki wielu logików, wśród których wymienimy w szczególności Peano i Schroedera, doprowadziły do utworzenia formalnego języka, w którym można było wyrazić dużą część matematyki. Rozwinął się także rachunek zdań, łącznie z aksjomatami logicznymi i regułami wnioskowania, chociaż nie osiągnął jeszcze poziomu późniejszego.

W tym samym czasie rozwój ogólnej teorii mnogości doprowadził do trudności pojęciowych, co wskazało na potrzebę logicznej analizy przedmiotu. Wzmocniło to więzy pomiędzy logiką i matematyką. Russel i Whitehead w trzech tomach dzieła pt. „Principia Mathematica" jasno pokazali jak można wyłożyć teorię mnogości i wprowadzić liczby naturalne w ramach logiki matematycznej. Ponadto przez wprowadzenie teorii typów umożliwili oni rozwiązanie pojęciowych trudności, które powstały w teorii mnogości. Kilka lat później Hilbert, używając podobnego, lecz w pewnym sensie prostszego formalizmu, zapoczątkował badania, których celem było ustalenie niesprzeczności arytmetyki. Jednakże, jak udowodnił to Gödel w roku 1931 — cel ten jest nieosiągalny. Oprócz innych wybitnych zalet,

praca Gödla dostarczyła impulsu dla rozwoju teorii funkcji rekurencyjnych. Mimo że teoria ta może być rozpatrywana jako gałąź arytmetyki, w dalszym ciągu badania na ten temat były inspirowane przez logikę. Doprowadziło to do naturalnego i zrozumiałego wyjaśnienia pojęcia obliczalności. Inne wyjaśnienia tego pojęcia okazały się równoważne z interpretacją uzyskaną w teorii funkcji rekurencyjnych. Doprowadziło to do wprowadzenia pojęcia maszyn Turinga, klasy teoretycznych maszyn liczących, które mają szereg ważnych wspólnych własności z dzisiejszymi maszynami cyfrowymi. Istotnie, rozwój techniki elektronicznych maszyn cyfrowych przebiegał prawie równolegle z rozwojem logicznej teorii obliczalności, jakkolwiek nie jest łatwo ocenić w jakim stopniu rozwój jednej dziedziny wpływał na drugą.

Pierwsza połowa dwudziestego wieku przyniosła także stopniową krystalizację ogólnego pojęcia modelu (lub realizacji) zbioru aksjomatów. Klasyczna praca na ten temat została opublikowana w roku 1935 przez Tarskiego. Pojęcie modelu dla pewnego zbioru aksjomatów jest istotnym składnikiem metody aksjomatycznej.

Na przykład, niech H będzie zbiorem aksjomatów dla ciała. H może być sformułowane za pomocą takich pojęć, jak relacja równości i operacje mnożenia i dodawania. Aksjomaty z H mówią, że operacje te są łączne, przemienne i powiązane przez prawo rozdzielności. Ponadto istnieją elementy neutralne względem dodawania i mnożenia, takie że $a+0 = a$ i $a \cdot 1 = a$ dla każdego a. Na koniec H zawiera aksjomaty, które mówią, że dla każdego a istnieje element odwrotny względem dodawania, $-a$, taki że $a+(-a) = 0$ i jeżeli $a \neq 0$, to istnieje element odwrotny względem mnożenia, a^{-1}, taki że $a \cdot a^{-1} = 1$. Każde ciało jest wtedy modelem dla H. A więc ciało liczb wymiernych, ciało liczb rzeczywistych i ciało liczb zespolonych są modelami dla H. Dla dowolnej liczby pierwszej p, liczby całkowite $0, 1, 2, \ldots, p-1$ tworzą model dla H, jeżeli zdefiniujemy jako wynik operacji dodawania i mnożenia resztę po podzieleniu przez p liczby, która powstanie po wykonaniu dodawania czy mnożenia w zwykły sposób. Są to tak zwane ciała reszt modulo p. Dla danego p dodawanie w tym ciele spełnia warunek, że dla każdego a, $a+a+\ldots+a = 0$, jeżeli a występuje po lewej stronie p razy. Ciało o takiej własności nazywa się ciałem o charakterystyce p. Wszystkie inne ciała mają charakterystykę 0.

Upłynęło wiele lat zanim pojęcie modelu zostało poddane analizie logicznej. Wydaje się, że nie było to spowodowane po prostu brakiem zrozumienia dla ważności modeli. Wynikło to raczej z tego, że celem pierwszych logików było oparcie matematyki na systematycznym rozwoju języków formalnych. Sądzili oni słusznie, że wyraźne powoływanie się na modele, a szczególnie nieskończone, może podważyć ich pierwotny cel, którym było całkowite zrozumienie przedmiotu badań. W tym samym czasie znajdujemy pewne ukryte próby powołania się na realizację zdań lub zbiorów zdań, na długo przed wyjaśnieniem tych pojęć logicznych.

IV

Po zamieszczonym wyżej historycznym szkicu opiszemy teraz pewne nowsze badania, ze szczególnym podkreśleniem zastosowań logiki w matematyce.

Oczywiste jest, że matematyk w swej pracy stale stosuje prawa logiki. Jednakże czyni to intuicyjnie i nie powołuje się wyraźnie na wykorzystywane prawa, w przeciwieństwie do logika, który wyraźnie o nich mówi i dokładnie je analizuje. Matematyk interesuje się dowodami poszczególnych twierdzeń lub poszczególnymi strukturami, takimi jak ciało liczb wymiernych, lub też wszystkimi strukturami, które spełniają pewien zbiór aksjomatów, jak np. ciałami, czy też grupami. Z drugiej strony logicy rozpatrując języki formalne mogą skoncentrować swoją uwagę na zdaniach, które wyrażają twierdzenia, a także w sposób bardziej abstrakcyjny mogą rozpatrywać wszystkie takie zdania, które mają pewną wspólną formalną własność, np. są wyrażone za pomocą pewnego szczególnego formalizmu. Jednym z najważniejszych języków formalnych w logice jest język rachunku predykatów, który zawiera symbole dla określonych indywiduów, określonych relacji i — ewentualnie — operacji, dla spójników zdaniotwórczych (i, lub, nie, implikuje) i dla kwantyfikatorów (istnieje, dla każdego) względem indywiduów.

Mając więc wyznaczoną w ten sposób pewną klasę zdań możemy się zapytać, czy wszystkie zdania z określonej klasy, które są spełniane przez pewną szczególną strukturę matematyczną lub zbiór struktur, są również spełnione przez jakąś inną strukturę lub zbiór struktur. Na przykład, niech K będzie klasą wszystkich zdań sformułowanych w języku rachunku predykatów za pomocą pojęć relacji równości i operacji mnożenia i dodawania. Można wtedy otrzymać następujące wyniki:

A. Jeżeli X jest zdaniem z klasy K, które jest spełnione przez wszystkie ciała charakterystyki 0, to istnieje dodatnia liczba całkowita p_0, taka że X jest spełnione przez wszystkie ciała charakterystyki $p \geqslant p_0$;

B. Jeżeli X jest zdaniem z klasy K, które jest spełnione przez ciało liczb zespolonych, to X jest spełnione przez wszystkie algebraicznie domknięte ciała charakterystyki 0.

C. Jeżeli X jest zdaniem z klasy K, które jest spełnione przez ciało liczb rzeczywistych, to X jest spełnione przez wszystkie ciała rzeczywisto-domknięte.

C jest „produktem ubocznym" metody podanej przez Tarskiego, która daje konkretny sposób na stwierdzenie, czy zdanie z klasy K jest spełnione przez ciało liczb rzeczywistych. W zasadzie możliwe jest zaprogramowanie tej procedury na maszyny cyfrowe, lecz do tej pory nie zostało to zrealizowane z powodu ograniczonej pojemności pamięci w istniejących maszynach. Tak więc istnieją problemy, które były dyskutowane w lite-

raturze i które można wyrazić zdaniami z klasy K, a które są nierozwiązane. Zauważmy, że wśród takich problemów może występować uporządkowanie ciała, ponieważ można to określić za pomocą operacji algebraicznych ($a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b-a$ posiada w ciele pierwiastek kwadratowy).

B wynika bezpośrednio z C. Jest to klasyczny wynik teorii ciał uzyskany przez Steinitza. A można udowodnić przez proste zastosowanie podstawowych twierdzeń rachunku predykatów.

B i C można rozpatrywać także w nieco inny sposób. Będziemy mówili, że zdanie X jest wyrażone w języku zbioru zdań H, gdzie do H należą zdania wyrażone w języku rachunku predykatów, o ile każdy symbol indywiduów, relacji i operacji, który występuje w zdaniu X, występuje w pewnym zdaniu z H. Zbiór zdań H nazywamy *zupełnym*, jeżeli każde zdanie z H, które jest wyrażone w języku H, jest spełnione przez wszystkie modele dla H, albo przez żaden (tzn. że negacja H jest spełniona przez wszystkie modele H). Pojęcia ciała algebraicznie domkniętego i ciała rzeczywisto-domkniętego mogą być wyrażone w języku rachunku predykatów przez zbiory aksjomatów (tzn. zdań) nazwanych odpowiednio H_{AC} i H_{RC}. Wtedy wypowiedziane powyżej twierdzenia B i C mówią, że H_{AC} i H_{RC} są zupełne. Zbiór aksjomatów dla pojęcia ciała nie jest zupełny, ponieważ jeżeli X jest zdaniem, które mówi, że „każde równanie kwadratowe ma pierwiastek", to X jest spełnione przez ciało liczb zespolonych, ale nie jest spełnione przez ciało liczb rzeczywistych.

V

H_{AC} można w sposób naturalny sformułować jako rozszerzenie zbioru aksjomatów H_A dla pojęcia ciała charakterystyki 0. Dokładniej, H_{AC} można otrzymać przez dodanie do H_A ciągu zdań Y_n, $n = 2, 3, \ldots$, gdzie Y_n mówią, że każdy wielomian stopnia n posiada pierwiastek. A więc H_A jest podzbiorem H_{AC}. Zakres pojęcia ciała algebraicznie domkniętego jest węższy niż zakres pojęcia ciała algebraicznego. Wyrażamy to mówiąc, że ciała algebraicznie domknięte tworzą właściwą podklasę klasy ciał. Algebraik może scharakteryzować w sposób nieformalny położenie ciał algebraicznie domkniętych, mówiąc, że dla rozwiązania dowolnego algebraicznego problemu o parametrach z ciała M należy rozpatrywać go w dowolnym algebraicznie domkniętym rozszerzeniu M (w szczególności wystarczy rozpatrzyć go w algebraicznym domknięciu ciała M).

Rozpatrzmy teraz jakiś inny zbiór aksjomatów H, wyrażonych w języku rachunku predykatów. W szczególności, niech H będzie zbiorem aksjomatów dla pojęcia ciała uporządkowanego, zawierających pojęcia równości, dodawania, mnożenia i uporządkowania. Możemy się wtedy zapytywać, czy istnieje aksjomatycznie określone pojęcie, które w taki sposób odnosi się do pojęcia ciała uporządkowanego, w jaki pojęcie ciała algebra-

icznie domkniętego odnosi się do pojęcia ciała. Innymi słowy, czy istnieje zbiór aksjomatów H', powiązany w podobny sposób ze zbiorem H, jak H_{AC} jest powiązane z H_A. Okazuje się, że możliwe jest postawienie tego pytania w sposób bardziej ogólny przez zdefiniowanie metamatematycznej funkcji F dla szerokiej klasy zbiorów aksjomatów. Funkcja ta przekształca zbiór aksjomatów H w zbiór aksjomatów H', tak że $H' = F(H)$ — zwany uzupełnieniem modelowym H (model-completion of H) — jest rozszerzeniem H, i ponadto $H_{AC} = F(H_A)$. Jeżeli H jest zbiorem aksjomatów dla ciała uporządkowanego, to okazuje się, że $F(H)$ jest zbiorem aksjomatów dla ciała rzeczywisto-domkniętego. Także w innych przypadkach pojęcie dane przez $F(H)$ okazuje się interesujące, chociaż nie było uprzednio zdefiniowane. Jeżeli, na przykład, H jest zbiorem aksjomatów dla ciała charakterystyki 0 z różniczkowaniem, to H należy do dziedziny F i każdy model dla $F(H)$ może być odpowiednio nazwany *ciałem różniczkowo-domkniętym*. Nie wchodząc bliżej w szczegóły pojęcia uzupełnienia modelowego ważne jest podkreślenie jego istotnie metamatematycznego charakteru. Zależy ono wyraźnie od zbioru aksjomatów (lub też, alternatywnie, od klasy struktur, które są dla tego zbioru modelami).

Istnieje wiele różnych sposobów wyrażania idei abstrakcji całkowicie różnych swym charakterem. Jak już wspomniano, proces abstrakcji, który w nowoczesnej algebrze skoncentrował się na pojęciu struktury, przeszedł przez wiele etapów, podczas których przybierał różny charakter. Również dla logika ważne jest pojęcie struktury matematycznej, lecz abstrahuje on ponadto od poszczególnych zdań, które występują przy konwencjonalnym podejściu, przy czym głównym obiektem swoich zainteresowań czyni całe klasy zdań. Wywołuje to dalszy proces abstrakcji, ponieważ nieskończona rodzina zdań nie jest bardziej realna niż nieskończona klasa elementów, które tworzą strukturę. Jednakże, w zależności od swych filozoficznych poglądów, logik może uważać poszczególne zdanie za coś bardziej realnego od pojedynczej struktury. Z drugiej strony jest prawdą, że bezpośrednia i łatwa metoda, przy pomocy której rozpatrywano zbiory zdań, doprowadziła do uczucia niepewności wśród matematyków usiłujących być platońskimi realistami w kwestii istnienia struktur matematycznych, lecz nie rozpatrujących zagadnienia istnienia nieskończonych klas zdań.

VI

Wyniki wspomniane wyżej w IV i V mają „konkretne" zastosowania, to znaczy że mogą być użyte do dowodzenia nietrywialnych twierdzeń algebry. Na przykład, istnieje pewne twierdzenie algebraiczne o związkach pomiędzy rozkładalnością wielomianu a jego rozkładalnością modulo liczba pierwsza p; twierdzenie to można traktować jako zastosowanie A (zob. IV). Wśród innych zagadnień, teoria dodatnio określonych funkcji

wymiernych, która prowadzi do rozwiązania siedemnastego problemu Hilberta (po raz pierwszy danego przez Artina), może być rozwijana w oparciu o wyniki opisane powyżej. Co więcej, istnienie pewnych ograniczeń na ilość kwadratów występujących w przedstawieniu funkcji dodatnio określonej zostało uzyskane po raz pierwszy właśnie tymi metodami.

Gałąź matematyki, która bada zależności pomiędzy zdaniami (zbiorami zdań) w danym języku formalnym a zbiorami (klasami, czy też rozmaitościami) modeli znana jest pod nazwą teorii modeli (1). Kierunek badań w tej dziedzinie, o którym jeszcze nie wspomniano, dotyczy formalnych właściwości zdań i teoriomnogościowych własności rozmaitości ich modeli. Na przykład wykazano, że jeżeli zdanie X jest takie, iż każdy niepusty podzbiór dowolnego modelu dla X jest modelem dla X, to X jest logicznie równoważne zdaniu ogólnemu w postaci normalnej, tzn. zdaniu, w którym nie występuje żaden kwantyfikator egzystencjalny i kwantyfikatory poprzedzają spójniki logiczne. Wybitnym wynikiem uzyskanym w tym kierunku badań jest, dokonana przez Lyndona, charakteryzacja zdań takich, że wraz z każdym modelem M dla X wszystkie homomorficzne obrazy M są modelami dla X. Także w teorii modeli dla innych języków formalnych (języków wyższego rzędu czy też języków, w których zdania mogą mieć nieskończoną długość), które nie są tak rozwinięte, jak teoria modeli dla języka rachunku predykatów, uzyskano wiele interesujących wyników.

Jeszcze innym kierunkiem jest poszukiwanie specjalnych metod dla konstrukcji modeli. Wymieńmy wśród nich w szczególności metodę ultraproduktów. Nie będziemy wchodzić teraz w szczegóły dotyczące tego tematu, lecz powiemy kilka słów o niestandardowej arytmetyce i o jeszcze nowszym przedmiocie — niestandardowej analizie.

Niech K będzie zbiorem wszystkich zdań w języku rachunku predykatów, które można sformułować używając pojęć równości, dodawania oraz mnożenia, i które są spełnione w systemie liczb naturalnych N. Jak zostało pokazane w 1934 r. przez Skolema, istnieje rozszerzenie właściwe N, w którym są spełnione wszystkie zdania ze zbioru K. Jest to tak zwany *niestandardowy model arytmetyki*. Przyczyny wprowadzenia tego modelu związane były z zagadnieniami filozoficznymi. Skolem chciał podkreślić to, że liczby naturalne nie dają się scharakteryzować w języku formalnym.

Analiza niestandardowa polega na zastosowaniu podobnych idei w innych dziedzinach matematyki. W szczególności można wykazać, że ciało

---

(1) Do pionierów z zakresu teorii modeli należą A. I. Malcew, A. Tarski, J. Łoś i L. Henkin. Szczegóły tej teorii, włącznie z pojęciami rozpatrywanymi powyżej, czytelnik może znaleźć w pracy A. Robinsona, *Introduction to Model Theory and to Metamathematics of Algebra*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam 1963. O zastosowaniu teorii dowodu do konkretnych problemów matematycznych zob. prace G. Kreisela.

liczb rzeczywistych R posiada rozszerzenia właściwe, które, przy bardzo bogatym słowniku, mogącym zawierać dowolną liczbę funkcji i relacji z R, spełnia te same zdania co R. Niech R' będzie jednym z takich rozszerzeń (zwanych *niestandardowymi modelami analizy*). R' musi być niearchimedesowskie, ponieważ jest rozszerzeniem właściwym ciała liczb rzeczywistych R. Okazuje się, że R' daje dostateczną podstawę do rozwijania rachunku różniczkowego i całkowego w sensie nieskończenie małych, podobnie jak to czynił Leibniz. Sama metoda prowadzi o wiele dalej i może być użyta w topologii, w teorii funkcji analitycznych i analizie funkcjonalnej. Niedawno za pomocą analizy niestandardowej został rozwiązany po raz pierwszy problem podprzestrzeni niezmienniczych przestrzeni Hilberta(2).

Przy rozpatrywaniu zarówno arytmetyki niestandardowej, jak i analizy niestandardowej, opieramy się na istnieniu pewnego „intencjonalnego" modelu (liczby naturalne lub liczby rzeczywiste), o którym przypuszczamy, że jest kategoryczny, nawet gdyby nie musiał być wyznaczony jednoznacznie przez swoje własności ustanowione w języku formalnym. Wybitny wynik otrzymany niedawno przez P. J. Cohena, dotyczący niezależności hipotezy continuum i niezależności pewnika wyboru(3), także opiera się na istnieniu intencjonalnych klas obiektów (np. „faktycznych" zbiorów i liczb porządkowych, które są „prawdziwymi" liczbami porządkowymi). Być może pogłębienie zrozumienia tych pojęć umożliwi postęp na odcinku filozoficznych aspektów logiki i matematyki, które w ciągu ostatnich lat pozostawały w cieniu osiągnięć technicznych, w rodzaju opisanych powyżej.

---

(2) Problem No. 9 w pracy P. R. Halmosa, *A glimpse into Hilbert space*, Lectures on Modern Mathematics, wyd. T. L. Saaty, t. 1, New York 1963, str. 1-22.

(3) Zob. P. J. Cohen, *The independence of the Continuum Hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 50(1963), str. 1143-1148; 51(1964), str. 105-110.