wmptm 1897

Zadania

Gwiazdką * oznaczane są te zadania, których rozwiązanie nie jest znane autorowi ani redakcji, albo znane jest tylko rozwiązanie częściowe. Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, uwagi o zadaniach, nowe zadania itp.) należy nadsyłać pod adresem: Andrzej Lelek, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 1, Skrytka Pocztowa 137. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

121*. Przez *graf wielościenny* będziemy rozumieli graf złożony z wierzchołków i krawędzi wielościanu wypukłego w przestrzeni euklidesowej 3-wymiarowej. Niech d_n i r_n oznaczają odpowiednio największą średnicę i największy promień (1) grafów wielościennych n-wierzchołkowych. Udowodnić, że

$$d_n = \left[\frac{n+1}{3}\right]$$

dla $n \geqslant 4$, oraz że

$$r_n \geqslant \left[\frac{n+4}{4}\right]$$

dla $n \geqslant 6$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Jaki jest wzór na liczbę r_n? Znaleźć wszystkie grafy wielościenne n-wierzchołkowe o średnicy równej d_n i wszystkie grafy wielościenne n-wierzchołkowe o promieniu równym r_n.

E. Jucovič (Prešov) i *J. W. Moon* (Londyn)

122*. Niech będzie dany graf (X, G), gdzie X jest dowolnym zbiorem, a G jest rodziną podzbiorów 2-elementowych zbioru X. Mówimy, że zbiór $Y \subset X$ ma własność (S), jeżeli istnieje funkcja $f\colon X \to Y$ taka, że warunek $\{x, x'\} \in G$ pociąga za sobą nierówności $x \neq f(x') \neq f(x)$. Czy można bez pewnika wyboru udowodnić, że dla każdego grafu (X, G) istnieje wśród podzbiorów zbioru X, mających własność (S), zbiór najmniejszy ze względu na relację zawierania lub zbiór o mocy najmniejszej?

S. Fajtlowicz (Wrocław)

---

(1) C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Paris 1958.

123. Niech (X, R) będzie grafem, tj. $R \subset X \times X$, takim że dla dowolnego elementu $x \in X$ istnieje tylko skończenie wiele elementów $y \in X$ spełniających relację xRy oraz dla ustalonego elementu $a_0 \in X$ i dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ istnieje ciąg elementów $a_0 = x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ spełniających nierówności $x_k \neq x_{k-1} \neq x_{k+1}$ i relacje $x_{k-1} R x_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. Dowieść, że wtedy istnieje ciąg nieskończony elementów $a_n \in X$ takich, że $a_n \neq a_{n-1} \neq a_{n+1}$ i $a_{n-1} R a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Jeśli przy tym wyrazy ciągów skończonych $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ są różne, to ciąg nieskończony $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ można wybrać tak, żeby jego wyrazy też były różne.

W. Holsztyński (Warszawa)

124. Dowieść, że istnieje przestrzeń topologiczna zwarta i doskonale normalna (tj. taka, że wszystkie podzbiory domknięte są zbiorami G_δ [2]) w tej przestrzeni), która nie zawiera żadnej nieprzeliczalnej podprzestrzeni metryzowalnej.

W. Holsztyński (Warszawa)

125. Oznaczmy przez 2^X przestrzeń wszystkich podzbiorów domkniętych, ograniczonych i niepustych przestrzeni metrycznej X, zmetryzowaną przez zwykłą odległość (Hausdorffa) między zbiorami [2]). Udowodnić, że na to, aby przestrzeń 2^X była ośrodkowa, potrzeba i wystarcza, aby każdy ograniczony podzbiór przestrzeni X był całkowicie ograniczony.

W. Holsztyński (Warszawa)

126. Czy przestrzenie 2^P i 2^Q, gdzie Q oznacza [3]) przedział otwarty na linii prostej P, są homeomorficzne?

W. Holsztyński (Warszawa)

127*. Niech A będzie podzbiorem ograniczonym przestrzeni metrycznej X z metryką ϱ. Oznaczmy przez $S_1(A)$ zbiór punktów $x \in X$ takich, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $\varrho(a, x) \leqslant \frac{1}{2}d$, gdzie d jest średnicą zbioru A. Zbiór $S_n(A)$ określamy [4]) rekurencyjnie wzorem

$$S_n(A) = S_1\big(S_{n-1}(A)\big),$$

---

[2]) K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1962.

[3]) Zob. zadanie 125.

[4]) Konstrukcja taka dla przestrzeni Banacha znajduje się w pracy: S. Mazur et S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci., Paris 194 (1932), str. 946-948.

dla $n = 2, 3, \ldots$ Przestrzeń metryczną X nazwiemy *centralną*, jeżeli dla dowolnej pary punktów $a, b \in X$ istnieje punkt $s(a, b)$ należący do wszystkich zbiorów $S_n(\{a, b\})$, $n = 1, 2, \ldots$ Udowodnić, że jeśli przestrzeń metryczna X jest zwarta i centralna, to odwzorowanie $s\colon X \times X \to X$ jest ciągłe.

W. Holsztyński (Warszawa)

128. Zbudować przestrzeń metryczną, lokalnie zwartą i wypukłą (tj. taką, że dowolną parę jej punktów można połączyć obrazem izometrycznym odcinka prostoliniowego), której uzupełnienie nie jest lokalnie zwarte.

C. Ryll-Nardzewski (Wrocław)

129*. Znaleźć punkty a, b, c nie leżące na jednej prostej oraz powierzchnię P o tej własności, żeby P była homeomorficzna, ale nie izometryczna ze sferą oraz żeby w każdej orientacji można było powierzchnię P przesunąć w położenie, w którym wszystkie punkty a, b, c znajdą się na niej. Czy istnieje wypukła powierzchnia P o żądanej własności?

C. Ryll-Nardzewski i *H. Steinhaus* (Wrocław)

130. Mamy na płaszczyźnie nieskończony, zbieżny ciąg punktów $p_1, p_2, \ldots$ oraz zbiór Z o mierze płaskiej dodatniej. Dowieść, że można zbiór Z przesunąć w położenie, w którym będzie on zawierał nieskończenie wiele spośród punktów $p_1, p_2, \ldots$

C. Ryll-Nardzewski i *H. Steinhaus* (Wrocław)

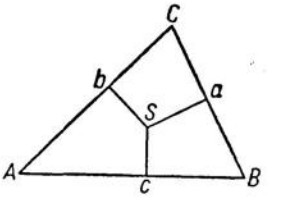
131*. Niech J i J' będą krzywymi zamkniętymi zwyczajnymi na płaszczyźnie i niech przekształcenie f ciągłe i wzajemnie jednoznaczne przeprowadza J w J' tak, że dla każdej pary punktów $p, q \in J$ zachodzi nierówność

$$|p-q| < |f(p)-f(q)|.$$

Czy z tego wynika, że obszar objęty przez J jest mniejszy od obszaru objętego przez J' (wielkość obszaru oznacza jego miara płaska Lebesgue'a)?

H. Steinhaus (Wrocław)

132*. Czy w dowolnym trójkącie ostrokątnym leży zawsze taki punkt S, że prostopadłe Sa, Sb, Sc dzielą pole ABC na 3 równe pola?



H. Steinhaus (Wrocław)

133*. Czy istnieje taki ciąg liczb naturalnych $a_1 < a_2 < \ldots$, żeby było

$$\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{\ldots}}} = \sqrt{\pi}\,?$$

H. Steinhaus (Wrocław)

134*. Czy można wewnątrz sześcianu o krawędzi 1 umieścić 8 punktów tak, żeby wszystkie ich wzajemne odległości były większe od 1? Czy można umieścić tak 9 punktów?

H. Steinhaus (Wrocław)

135*. W kole o promieniu 1 umieszczono 10 punktów tak, żeby najmniejsza odległość wzajemna była maksimum. Jaka jest ta odległość?

H. Steinhaus (Wrocław)

136*. Oznaczmy przez $f(n)$, dla $n = 4, 5, \ldots$, największą z liczb całkowitych m takich, że dowolny układ n punktów na płaszczyźnie, nie leżących na jednym kole, wyznacza co najmniej m kół (tj. mamy m różnych kół, z których każde przechodzi przez co najmniej 3 punkty układu). Podać wzór na funkcję $f(n)$ lub oszacować ją z góry i z dołu.

P. Erdős (Budapeszt)

137*. Niech $p_1 p_2, \ldots$ będzie ciągiem wszystkich liczb pierwszych, uporządkowanym według wielkości. Oznaczmy przez $g(j, n)$ liczbę liczb całkowitych m z przedziału $1 \leqslant m \leqslant n$, które są wielokrotnościami co najmniej jednej spośród liczb $p_1, \ldots, p_j$. Czy jest prawdą, że jeżeli

$$1 \leqslant a_1 < \ldots < a_k \leqslant n, \qquad g(j, n) < k,$$

są liczbami całkowitymi, to istnieje co najmniej $j+1$ liczb a_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ parami względnie pierwszych?

P. Erdős (Budapeszt)

138*. Niech X będzie zbiorem skończonym $(3n+2)$-elementowym. Czy w każdym układzie, zawierającym co najmniej

$$h(n) = 1 + \sum_{j=n+1}^{3n+2} \binom{3n+2}{j}$$

podzbiorów zbioru X, istnieją 3 podzbiory parami rozłączne? Dowieść, że dla układów, złożonych z mniej niż $h(n)$ podzbiorów, jest to fałszywe.

P. Erdös (Budapeszt)

139. Czy suma dowolnej rodziny podzbiorów wypukłych przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej, mających punkt wspólny, jest przestrzenią jednosprzęgłą ([2])?

A. Lelek (Wrocław)

140*. Znaleźć podział symplicjalny $\boldsymbol{P}(\Delta^n)$ sympleksu n-wymiarowego Δ^n ($n = 1, 2, \ldots$) taki, żeby $\boldsymbol{P}(\Delta^n)$ był

1° symplicjalnie adekwatny, tj. aby dla każdej ściany $(n-1)$-wymiarowej Δ^{n-1} sympleksu Δ^n zbiory postaci $\Delta \cap \Delta^{n-1}$, gdzie Δ jest sympleksem podziału $\boldsymbol{P}(\Delta^n)$, tworzyły podział $\boldsymbol{P}(\Delta^{n-1})$,

2° potencjalnie drobny, tj. aby średnica największego sympleksu m-krotnego podziału $\boldsymbol{P}^m(\Delta^n)$ zmierzała do zera przy m dążącym do nieskończoności,

3° pokryciowo ograniczony, tj. aby istniała liczba $k = k(n)$ niezależna od m i taka, że dla każdego $m = 1, 2, \ldots$ dowolny punkt sympleksu Δ^n należy do co najwyżej k spośród sympleksów podziału $\boldsymbol{P}^m(\Delta^n)$.

Podział barycentryczny spełnia warunki 1° i 2°, ale nie spełnia warunku 3°.

A. Lelek (Wrocław)

Rozwiązanie zadania

51*. *Niech f i g będą wielomianami k zmiennych, przyjmującymi wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Czy jeśli dla każdego układu liczb całkowitych $n_1, \ldots, n_k$ liczba $g(n_1, \ldots, n_k)$ jest wielokrotnością liczby $f(n_1, \ldots, n_k)$, to wielomian g jest podzielny przez wielomian f?*

A. Mąkowski (Warszawa)

Udowodnimy że odpowiedź jest twierdząca. Zauważmy przede wszystkim, że oba wielomiany f i g muszą mieć współczynniki wymierne.

LEMAT 1. *Jeżeli $f(x_i, \ldots, x_k)$ i $g(x_1, \ldots, x_k)$ są wielomianami o współczynnikach wymiernych oraz wielomian f jest względem zmiennej x_i stopnia dodatniego, to istnieją wielomiany $F(x_{i+1}, \ldots, x_k)$, $G(x_1, \ldots, x_k)$ i $R(x_1, \ldots, x_k)$ o współczynnikach całkowitych takie, że*

$$Fg = fG + R \tag{1}$$

oraz stopień wielomianu R względem zmiennej x_i jest niższy niż stopień wielomianu f względem tej zmiennej.