wmptw 1897 101

podzbiorów zbioru $X$, istnieją 3 podzbiory parami rozłączne? Dowieść, że dla układów, złożonych z mniej niż $h(n)$ podzbiorów, jest to fałszywe.

*P. Erdös* (Budapeszt)

**139.** Czy suma dowolnej rodziny podzbiorów wypukłych przestrzeni euklidesowej $n$-wymiarowej, mających punkt wspólny, jest przestrzenią jednosprzęgłą ([2])?

*A. Lelek* (Wrocław)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

**140*.** Znaleźć podział symplicjalny $\boldsymbol{P}(\Delta^n)$ sympleksu $n$-wymiarowego $\Delta^n$ ($n = 1, 2, \ldots$) taki, żeby $\boldsymbol{P}(\Delta^n)$ był

1° symplicjalnie adekwatny, tj. aby dla każdej ściany $(n-1)$-wymiarowej $\Delta^{n-1}$ sympleksu $\Delta^n$ zbiory postaci $\Delta \cap \Delta^{n-1}$, gdzie $\Delta$ jest sympleksem podziału $\boldsymbol{P}(\Delta^n)$, tworzyły podział $\boldsymbol{P}(\Delta^{n-1})$,

2° potencjalnie drobny, tj. aby średnica największego sympleksu $m$-krotnego podziału $\boldsymbol{P}^m(\Delta^n)$ zmierzała do zera przy $m$ dążącym do nieskończoności,

3° pokryciowo ograniczony, tj. aby istniała liczba $k = k(n)$ niezależna od $m$ i taka, że dla każdego $m = 1, 2, \ldots$ dowolny punkt sympleksu $\Delta^n$ należy do co najwyżej $k$ spośród sympleksów podziału $\boldsymbol{P}^m(\Delta^n)$.

Podział barycentryczny spełnia warunki 1° i 2°, ale nie spełnia warunku 3°.

*A. Lelek* (Wrocław)

## Rozwiązanie zadania

**51*.** *Niech $f$ i $g$ będą wielomianami $k$ zmiennych, przyjmującymi wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Czy jeśli dla każdego układu liczb całkowitych $n_1, \ldots, n_k$ liczba $g(n_1, \ldots, n_k)$ jest wielokrotnością liczby $f(n_1, \ldots, n_k)$, to wielomian $g$ jest podzielny przez wielomian $f$?*

*A. Mąkowski* (Warszawa)

Udowodnimy że odpowiedź jest twierdząca. Zauważmy przede wszystkim, że oba wielomiany $f$ i $g$ muszą mieć współczynniki wymierne.

LEMAT 1. *Jeżeli $f(x_i, \ldots, x_k)$ i $g(x_1, \ldots, x_k)$ są wielomianami o współczynnikach wymiernych oraz wielomian $f$ jest względem zmiennej $x_i$ stopnia dodatniego, to istnieją wielomiany $F(x_{i+1}, \ldots, x_k)$, $G(x_1, \ldots, x_k)$ i $R(x_1, \ldots, x_k)$ o współczynnikach całkowitych takie, że*

$$Fg = fG + R \tag{1}$$

*oraz stopień wielomianu $R$ względem zmiennej $x_i$ jest niższy niż stopień wielomianu $f$ względem tej zmiennej.*

Dowód lematu 1 dla $i = 1$ znajduje się w podręczniku Sierpińskiego ([5]) na str. 139, 140. Dla dowolnego $i$ rozumowanie jest identyczne.

LEMAT 2. *Jeżeli* $f(x_i, \ldots, x_k)$ *i* $g(x_1, \ldots, x_k)$ *są wielomianami przyjmującymi wartości całkowite dla argumentów całkowitych, wielomian* $f$ *jest względem zmiennej* $x_i$ *stopnia dodatniego oraz dla każdego układu liczb całkowitych* $n_i, \ldots, n_k$ *liczba* $f(n_i, \ldots, n_k)$ *dzieli liczbę* $g(n_1, \ldots, n_k)$, *to istnieją wielomiany* $F(x_{i+1}, \ldots, x_k)$ *i* $G(x_1, \ldots, x_k)$ *o współczynnikach całkowitych takie, że* $Fg = fG$.

Dowód lematu 2. Jak już zauważyliśmy, wielomiany $f$ i $g$ muszą mieć współczynniki wymierne. Weźmy wielomiany $F$, $G$ i $R$ zgodnie z lematem 1. Wprowadzając rozwinięcia

$$f(x_i, \ldots, x_k) = A_t(x_{i+1}, \ldots, x_k)x_i^t + \ldots + A_0(x_{i+1}, \ldots, x_k),$$

$$R(x_1, \ldots, x_k) = B_s(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k)x_i^s + \ldots + B_0(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k),$$

mamy $0 \leqslant s < t$. Gdyby wielomian $R$ nie był tożsamościowo równy zeru, to samo dotyczyłoby wielomianu $A_tB_s$, a więc moglibyśmy znaleźć liczby całkowite $n_1, \ldots, n_{i-1}$, $n_{i+1}, \ldots, n_k$ takie, że

$$A_t(n_{i+1}, \ldots, n_k)B_s(n_1, \ldots, n_{i-1}, n_{i+1}, \ldots, n_k) \neq 0. \tag{2}$$

Oznaczając

$$S(x) = R(n_1, \ldots, n_{i-1}, x, n_{i+1}, \ldots, n_k),$$

$$T(x) = f(x, n_{i+1}, \ldots, n_k),$$

dostalibyśmy wobec (1), że dla każdej liczby całkowitej $n$ liczba $T(n)$ dzieli liczbę $S(n)$, skąd $|T(n)| \leqslant |S(n)|$ dla dostatecznie dużych $n$, na mocy (2). Jednakże nierówność $s < t$ pociąga nierówność $|S(n)| < |T(n)|$ dla dostatecznie dużych $n$, na mocy (2). Otrzymana sprzeczność dowodzi, że wielomian $R$ jest tożsamościowo równy zeru, a zatem wobec (1) wielomiany $F$ i $G$ spełniają tezę lematu 2.

Niech teraz wielomiany $f$ i $g$ spełniają założenia zadania. Kolejno stosując lemat 2, dostajemy.w rezultacie ciąg równości

$$\frac{g}{f} = \frac{g_1}{f_1} = \frac{g_2}{f_2} = \ldots,$$

gdzie $f_{j+1}$ jest wielomianem mniejszej ilości zmiennych niż wielomian $f_j$. W ten sposób otrzymamy równość

$$g = f\frac{g_k}{f_k},$$

gdzie $\frac{g_k}{f_k}$ jest wielomianem.

*W. Narkiewiecz* (Wrocław)

---

([5]) W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*, Warszawa-Wrocław 1951.