wmptm 1897

z założenia, że podręcznik K. Borsuka i W. Szmielew jest za trudny i postanowił dać do rąk nauczycieli coś łatwiejszego. Nie wnikając w to, czy takie założenie było w ogóle słuszne i celowe muszę stwierdzić, że wytkniętego celu Autor w omawianej książeczce nie osiągnął. Obok pewnych oryginalnych ujęć książka ma przede wszystkim ten zasadniczy brak, że przy pozorach dużej ścisłości precyzowania pojęć i wysławiania twierdzeń przemyca dużo faktów niezdefiniowanych należycie. O wiele lepsza byłaby metoda nietuszowania trudności, lecz właśnie ich akcentowania i ewentualnego odsyłania czytelnika do innych dzieł. Książka ma również pewne luki (brak np. ogólnych twierdzeń o rozkładzie dowolnej izometrii na pewne izometrie szczególnych typów, czego nie powinno było zabraknąć, choćby ze względu na sam tytuł książeczki).

Sama redakcja tekstu wykazuje wreszcie pewne usterki wynikające chyba z pośpiechu.

Mimo wytkniętych braków książeczka może okazać się w ręku wielu nauczycieli dużą pomocą i rozszerzeniem horyzontów, przynajmniej w pierwszym okresie po reformie programów geometrii w szkołach średnich.

Stanisław Gołąb

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Witold Janowski, Paweł Wiatrowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Biblioteczka Nauczyciela Matematyki, t. 4, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1964, str. 272.

Szkolnictwo podstawowe i średnie w Polsce przeżywa obecnie reformę, która na odcinku matematyki objawia się wprowadzaniem na obu szczeblach nauczania elementów tradycyjnej matematyki wyższej oraz elementów matematyki współczesnej. W szczególności do programów matematyki w liceach ogólnokształcących wróciły elementy rachunku różniczkowego i całkowego. Wymaga to przygotowania nowych podręczników szkolnych i, wykraczających nieco poza program, książek przeznaczonych dla ucznia i dla nauczyciela. Do tej ostatniej grupy należy recenzowana książka. Wprawdzie autorzy w przedmowie twierdzą „Książka niniejsza jest przeznaczona w zasadzie dla nauczycieli matematyki w klasach licealnych...", jednakże wydaje się, że głównymi jej odbiorcami, oczywiście za pośrednictwem nauczycieli, będą ci uczniowie liceów, których zainteresuje poszerzenie elementów rachunku różniczkowego i całkowego, przewidzianych programem szkolnym. Dla nauczycieli-matematyków z wyższym wykształceniem z tego zakresu, książka nie zawiera bowiem ani nieznanych im wiadomości, ani też układ jej treści i metody w niej stosowane nie odbiegają od tradycyjnych. Część I książki zawiera bowiem wiadomości o funkcjach, granicach i ciągłości funkcji, pojęcie pochodnej oraz różniczki i podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego, zastosowanie rachunku różniczkowego do badania przebiegu funkcji oraz do przybliżonego rozwiązywania równań. Część II obejmuje wiadomości o całce nieoznaczonej, o całce Riemanna i zastosowanie rachunku całkowego do obliczania pól wycinków, długości łuków, pól i objętości brył obrotowych. Na podkreślenie zasługuje szeroko rozbudowane i podbudowane przykładami i ćwiczeniami zastosowanie rachunku różniczkowego do przybliżonego rozwiązywania równań. Uwzględniono też wiele łatwo dostępnych zastosowań metod rachunku różniczkowego i całkowego w fizyce. Ćwiczenia z odpowiedziami (200) ułatwią czytelnikowi-uczniowi kontrolę należytego zrozumienia tekstu i opanowania podstawowych metod rachunkowych tego działu matematyki. Szkoda tylko, że autorzy w doborze ćwiczeń nie uwzględnili strony pojęciowej (związki między pojęciami, dowody prostych twierdzeń), a ograniczyli się jedynie do zagadnień rachunkowych, wprawdzie też ważnych, ale łatwiejszych, jak uczy doświadczenie, nawet dla

studentów. Nie zapominajmy bowiem o tym, że należyte i wszechstronne uwypuklenie strony pojęciowej decyduje o kształceniu myślenia przez matematykę.

Przejdę obecnie do krytycznych uwag szczegółowych. Jest ich wiele (niemal każda strona książki nasuwa pewne uwagi) i dlatego ograniczę się do najważniejszych. Jedne z nich mają charakter zasadniczych zarzutów merytorycznych, drugie metodycznych, inne wreszcie stanowią luźne uwagi recenzenta lub są wynikiem pomyłek drukarskich w recenzowanej książce.

Przy definiowaniu kresu dolnego i górnego zbioru liczb (str. 6-7) nie uwypuklono, że nie każdy zbiór musi posiadać te kresy. Uwzględniając postulat unowocześnienia matematyki w szkole warto by przy definiowaniu funkcji (str. 7) podać ogólną definicję funkcji jako relacji dwuczłonowej jednoznacznej. Przy definiowaniu ciągu harmonicznego (str. 8) aż się prosi wyjaśnienie skąd pochodzi jego nazwa. Pewne wątpliwości recenzenta budzi graficzne podawanie funkcji (str. 10). Założenia dotyczące sensowności złożenia dwu funkcji (str. 14) podano niejasno. Nieistnienie funkcji odwrotnej do funkcji x^2 (str. 16) nie jest spowodowane brakiem monotoniczności (ta ostatnia jest bowiem tylko warunkiem dostatecznym odwracalności), ale brakiem różnowartościowości. Wprawdzie dla funkcji ciągłej w przedziale oba warunki są równoważne, ale autorzy nic o tym nie wspominają, co może w konsekwencji wywołać u czytelnika niewłaściwe skojarzenia. Wyprowadzenie wzoru na sumę $\arcsin x$ i $\arccos x$ (str. 18) ma lukę, bowiem związki $x = \arcsin y$ i $y = \sin x$ nie są równoważne. Zdanie czwarte na str. 19 powinno następować bezpośrednio po pierwszym. Nie wyjaśniono, co oznacza symbol $\equiv$, a mogą tu być wątpliwości, np. w przykładzie 2 na str. 21 (lewa strona ma sens dla $x = 3$, a prawa nie). Przy rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste (str. 22) brak założenia, że czynniki kwadratowe w mianowniku mają być nierozkładalne, co powoduje, że przykłady w dalszym ciągu podawane mogą być niejasne. Funkcję wykładniczą należałoby (szczególnie dla wykładnika niewymiernego) zdefiniować dokładnie po wprowadzeniu pojęcia przejścia granicznego, a nie na str. 26. Część tytułu § 4 (Działania na granicach — str. 27) nie jest szczęśliwa, nie chodzi tu bowiem o działania na granicach, lecz o zagadnienie zupełnie inne. Cała interpretacja geometryczna granicy funkcji jest co najmniej niedokładna (sugestia rysunku), a zdanie w nawiasach na str. 28 jest wręcz fałszywe. Często mylony jest termin „otoczenie" z terminem „sąsiedztwo" (np. str. 30, 43, 102, 124, 125). W przykładzie 1 na str. 30 brak niezbędnych, przy takim sposobie poszukiwania δ, zastrzeżeń co do ε ($\varepsilon < 4$). Zabraniamy uczniom mechanicznego rachowania, róbmy więc to wszędzie! Dowód lematu b) na str. 35 jest zarazem dowodem właściwego twierdzenia, wystarczy tylko odrzucić zastrzeżenie, że r jest liczbą wymierną w drugiej części dowodu. Odsyłacz na str. 41 jest zbędny, bowiem w definicji granicy funkcji tkwi założenie określoności jej w pewnym sąsiedztwie punktu x_0. Na str. 43 należy wykazać istnienie liczby M. Założenie $g(x) \neq 0$ jest w twierdzeniu d) na str. 44 zbędne, bowiem z założenia, że $g \neq 0$, wynika już istnienie takiego sąsiedztwa liczby x_0, że $g(x) \neq 0$ w tym sąsiedztwie. W wierszu 9 od góry na str. 46 należy opuścić bezwzględną wartość, a ponadto, zgodnie z definicją granicy $+\infty$ funkcji, dobrać N tak, by $N - a + \varepsilon$ w związku (4) była liczbą dodatnią. Niezbyt zręczne jest nazywanie symbolem nieoznaczonym sumy, iloczynu czy ilorazu funkcji (str. 47), lepiej chyba mówić: suma, iloczyn, iloraz daje symbol nieoznaczony, gdy $x \to x_0$. Druga część dowodu twierdzenia na str. 58 zredagowana jest niezbyt przekonywająco. Zdanie „funkcję $f(x)$ nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0, jeżeli posiada w tym punkcie skończoną pochodną", jest mylące, bowiem sugeruje, że pochodna $f'(x_0)$ może być równa $\pm\infty$ (co czasem dopuszczamy w analizie i co powoduje pewne komplikacje w dalszym rozwijaniu rachunku różniczkowego). Z dalszego ciągu książki wynika jednak, że autorzy pod $f'(x_0)$ rozumieją liczbę. Wniosek $A \to A_0$, gdy $x \to x_0$, na str. 67 wymaga założenia ciągłości funkcji $f(x)$ w punkcie x_0. Dowód twierdzenia VI na str. 74 nie jest poprawny, nie wykazano bowiem istnienia pochodnej ilorazu.

Wypowiedź twierdzenia XII (str. 79) nie jest pełna, ciągłość funkcji odwrotnej (wykorzystywana w dowodzie twierdzenia) wymaga rozpatrywania całego zagadnienia w przedziale. Punkty A i B (str. 89) należą nie do pola funkcji, a do jej wykresu. Ponadto termin „błąd bezwzględny" użyty na tej str. ma w teorii błędu inne znaczenie, a r nazywa się po prostu błędem. Twierdzenia 1 i 3 na str. 90 wymagają dodatkowych założeń (występujących w dowodzie), które należało umieścić w samych wypowiedziach twierdzeń. Można bowiem zgodzić się na szkice dowodów, ale w żadnym wypadku nie można pogodzić się z niepełnymi (bo fałszywymi) twierdzeniami. Spadek stycznej w ćwiczeniu 1 na str. 95 nie był wcześniej zdefiniowany. W twierdzeniu Rolle'a na str. 100 założenie określoności funkcji w przedziale $[a, b]$ jest zbędne, wobec założenia ciągłości. Przypadek 3 w dowodzie twierdzenia Rolle'a (str. 103) można, przez zastąpienie funkcji $f(x)$ funkcją $-f(x)$, sprowadzić do przypadku 2. W twierdzeniu a) na str. 107 brak założenia ciągłości jednostronnej funkcji $f(x)$ na końcach przedziału $[a, b]$. To samo w twierdzeniu b) na str. 108 (w którym dodatek, że pochodne są skończone, jest zbędny) oraz w twierdzeniu c) na str. 109. Twierdzenie 1 na str. 113 warto by było dać, jako lemat, przed dowodem twierdzenia Rolle'a, co by znacznie uprościło dowód tego ostatniego. W przykładzie 7 na str. 120-121 warto by wyjaśnić co z x_2 ? Z przeprowadzonego na str. 122 rozumowania nie możemy jeszcze wnioskować, że pochodna $f'(-2)$ nie istnieje. O mierze wektora mówimy względem osi, należy więc tę oś, posługując się pojęciem miary, wskazać (str. 124). Twierdzenie po twierdzeniu 3, str. 126, nie jest kontrapozycją twierdzenia 3 „sensu stricto". Wniosek w dwu ostatnich wierszach str. 127 („zatem nie ma...") nie jest usprawiedliwiony żadnym wcześniejszym twierdzeniem. Przy wyznaczaniu asymptoty pochyłej na str. 130 należałoby stwierdzić, że jeżeli m i n wyznaczymy w znany sposób, to prosta $y = mx+n$ jest asymptotą (stosowano tu bowiem metodę „analizy starożytnych", a w niej niezbędne jest sprawdzenie). Jak czytelnik ma sobie uzasadnić 3 a) w przykładzie 1 na str. 134 (podobnie dalsze przykłady) ? Przy odcinku (str. 140) parametr musi zmieniać się w przedziale domkniętym, bowiem (z definicji) końce odcinka do niego należą. Brak wyraźnego określenia stycznej do krzywej danej parametrycznie (str. 142). We wzorze (4) na str. 161 ma być $f'(x) > 0$ zamiast $f(x) > 0$. Warunek ten jest zresztą zbędny, bo nie jest nigdzie wykorzystany w dowodzie. W pierwszych dwu wierszach str. 162 ma być $\mu(x)$ zamiast $\mu'(x)$, a ponadto przedział $[a, b]$ należy zastąpić przedziałem $(a, b]$. W wierszu 10 od góry na str. 171 należy dodać φ „i z ciągłości jej pochodnej" po wyrazach „z ciągłości funkcji $f(x)$". Całka nieoznaczona jest rodziną funkcji, należy więc wyjaśnić znaczenie symboli „+" i „=" we wzorze w twierdzeniu 4, str. 180. Podobna uwaga odnosi się do dalszych twierdzeń rachunku całkowego. W wierszu 9 od góry na str. 182 zamiast $f(x)g'(x)$ ma być $f'(x)g(x)$. Rachunki przy obliczaniu całek nieoznaczonych przeprowadzano dość formalnie (np. str. 203: $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$), a szkoda, bo można było choć jeden przykład przerachować przy pełnych zastrzeżeniach, pozostawiając uzupełnienie innych czytelnikowi. Umieszczenie teorii ciągów po rachunku różniczkowym budzi obiekcje recenzenta, przeczy bowiem zasadzie „stopniowania trudności". Ponadto wydaje się być rzeczą niezmiernie dogodną mieć też do dyspozycji definicję Heinego granicy i ciągłości funkcji. W definicji ciągu częściowego (wolę: wybranego) ciągu (str. 213) nie dodano, że ciąg $\{n_k\}$ ma być nieskończony, co jest tym bardziej mylące, że w wierszu 4 od góry na str. 213 nie dopisano kropek po wyrazie $a_{2k+1}(...)$. Niezbyt jasno na str. 221 określono pole obszaru normalnego względem osi x. Zdanie w wierszach 17-18 od góry na str. 223 jest dla mnie, w kontekście tej stronicy, zupełnie niezrozumiałe. Obliczenia $\int_b dx$ na str. 224 nie można uznać za poprawne, bowiem nie wykazano, że pole określone przez całkę pokrywa się, w przypadku wielokątów, z polem podanym wzorami znanymi przez ucznia uprzednio. Należało na ten problem przynajmniej zwrócić uwagę, bowiem uczniowie i tak mają

skłonność do rozumowania „przez analogię" wynikającą ze zbieżności terminologicznej. Natomiast przy obliczaniu $\int_0^1 x^2\,dx$ na str. 225-226 nie podkreślono, że wykorzystujemy tu fakt istnienia tej całki, wynikający z twierdzeń poznanych wcześniej. Na str. 226 chodzi oczywiście nie o miary wektorów $\vec{AB}$ i $\vec{F}$, ale o ich długości. Twierdzenie 6 na str. 229 uzasadniono na str. następnej tylko dla $a<b$ (a potrzebne jest i dla $a>b$). Ponadto nie uzasadniono, że $\xi\in(a,b)$, a tylko, że $\xi\in[a,b]$. W wierszu 11 od góry na str. 231 zamiast „por. str. 223" ma być „por. tw. 1 na str. 227", a w wierszu 6 od dołu zamiast „w myśl tw. 2" ma być „w myśl uwagi uzupełniającej po tw. 2". W zastosowanej na str 245-248 metodzie wyznaczania pola wycinka należy założyć, że występujące tam funkcje są klasy C^1. Wskazuje to na niedogodność użytej metody przy wyprowadzaniu wzoru (5) na str 247 (można go bez trudu uzyskać przy słabszym założeniu). O funkcji $f(x)$ na str. 251 i 259 należy założyć klasę C^1 nie w przedziale (a,b), a w przedziale $[a,b]$. Przy obliczaniu powierzchni kuli na str. 262 jedna z całek jest niewłaściwa. Wypowiadanie reguły de L'Hospitala aż w dwu twierdzeniach jest zbyteczne, tym bardziej, że pominięto bardzo wiele przypadków zastosowania tej reguły, a można je było wszystkie ująć elegancko w jedno twierdzenie. Uwagę po przykładzie 4 na str. 268 należało koniecznie podać zaraz po wypowiedzi twierdzenia de L'Hospitala, bowiem niektóre z podanych przykładów nie podpadają pod wypowiedziane twierdzenie (np. w przykładzie 3 na str. 267 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ nie istnieje). Ponadto w uwadze tej zamiast „do ilorazu $f(x)/g(x)$" ma być „do ilorazu $\frac{g(x)}{f(x)}$". Wniosek „Jeżeli funkcja $\varphi(t)$ jest malejąca, to $x'_t<0,\ldots$" w dodatku na str. 269, nie jest oczywiście prawdziwy. Związek (2), jak to wynika z przeprowadzonego rozumowania, został uzasadniony przy założeniu, że $\varphi(t)$ jest funkcją monotoniczną. Wprawdzie gdy $\varphi'(t)\neq 0$ w przedziale, to $\varphi(t)$ jest funkcją monotoniczną, ale należało o tym przynajmniej wspomnieć.

Rysunki w recenzowanej książce budzą też zastrzeżenia. Wskażę niektóre z nich. Na rysunku 1, str. 6, dwa różne punkty oznaczone tą samą literą „a". Na rysunku 3, str. 9, punkt (0,1) powinien być usunięty z wykresu funkcji. Te same zastrzeżenia dotyczą rysunków 5, 30, 31, 33, 38, i 40. Rysunek 37 na str. 45 nie odpowiada założeniom twierdzenia 2 z poprzedniej stronicy, ponadto pomylono na nim funkcję f z funkcją h.

Utrudnieniem w korzystaniu z książki będzie niewątpliwie brak skorowidza.

Proszę wybaczyć recenzentowi wiele drobiazgowych uwag krytycznych, wydaje się jednak, że książki przeznaczone dla młodzieży, zwłaszcza z matematyki, powinny być wydawane z dużą starannością pod względem merytorycznym i graficznym.

Zenon Moszner

Wacław Sierpiński, *O teorii mnogości*, Biblioteczka Nauczyciela Matematyki, t. 5, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1964, str. 68.

Nazwa serii, w której ukazała się książka oraz wstępna notka od redakcji wyjaśniają, że mamy do czynienia z książką przeznaczoną dla nauczycieli matematyki. Podtytuł „Wybrane zagadnienia dla szkół średnich", a także parę uwag w tekście sugeruje, że materiał przedstawiony w książce będzie wykorzystany na zajęciach praktycznych z tą częścią młodzieży, która przejawia specjalne zainteresowanie matematyką. Fakt, że książka tego rodzaju była pilnie potrzebna i ma do odegrania dużą rolę w moderniza-