wmptm 1897 145

Książkę uzupełniają tablice liczb t_n $(1 \leqslant n \leqslant 200)$ i T_n $(1 \leqslant n \leqslant 100)$ oraz zestawienie ciągów, których wyrazy łatwo jest wypisać w układzie dziesiętnym, złożonych z liczb trójkątnych. Zauważmy, że liczby trójkątne i tetraedralne to liczby $\binom{n+k-1}{k}$ odpowiednio dla $k = 2$ i 3.

Przy czytaniu książki nasunęły mi się następujące uwagi:

Na str. 7 i 9 nazwisko Khatri jest błędnie pisane.

Szkoda, że fałszywe twierdzenie Khatriego, o którym mowa na str. 7-8 i które jest obalone przez podanie kontrprzykładu, nie zostało zacytowane — kontrprzykład jest przez to niezrozumiały dla czytelnika. Chodzi tu o twierdzenie: jeżeli a, b, c, d tworzą postęp arytmetyczny, to t_{ac}, t_{bc}, t_{bd} też tworzą postęp arytmetyczny. Łatwo sprawdzić, że jest ono prawdziwe tylko w przypadku, gdy różnica postępu a, b, c, d jest równa -1, 0 lub 1. Jeżeli różnica ta jest równa 1 lub -1, to twierdzenie wyraża po prostu tożsamość podaną w wierszu 5 od dołu na str. 7.

Szkoda również, że nie jest podane sformułowanie hipotezy Schinzla o liczbach pierwszych, która jest kilkakrotnie wspominana.

W wierszu 5 na str. 32 powinno być: $2x+1$ i y.

W wierszu 11 na str. 56 powinno być: każda liczba tetraedralna.

Na str. 57, gdy mowa o wynikach B. Bienias, brakuje oczywistego rozwiązania $T_3T_6 = T_{14}$.

Do niedociągnięć redakcyjnych zaliczyłbym podawanie odsyłaczy do literatury w tekście i notkach (np. na str. 47 zastosowane są obydwa sposoby).

Pomimo wyżej wymienionych usterek książkę czyta się przyjemnie. Czytelnik interesujący się elementarną teorią liczb, a takich jest w Polsce, w dużym stopniu dzięki dotychczasowym publikacjom prof. Sierpińskiego z tej dziedziny, bardzo wielu, otrzymał książkę, która dostarczy mu materiału do dalszych studiów, czytelnik zaś początkujący zobaczywszy, jak ciekawe i trudne mogą być problemy dotyczące bardzo prostych pojęć matematycznych i poznawszy równocześnie różne metody stosowane w elementarnej teorii liczb oraz jej wyniki, w przyszłości na pewno sięgnie po inne książki matematyczne, zostając miłośnikiem królowej matematyki. Warto tu jeszcze zauważyć, że prawie nie praktykowanym dziś w polskich wydawnictwach matematycznych zwyczajem ta ładnie wydana książka zawiera fotografię autora wraz z facsimile jego podpisu.

Uwagi recenzenta: K. Szymiczek znalazł parę liczb trójkątnych, których suma, różnica i iloczyn są liczbami trójkątnymi (zob. str. 23). Ponadto stwierdził on (*L'équation $uv = w^2$ en nombers triangulaires*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 3(1963), 139-141), że istnieje nieskończenie wiele postępów geometrycznych rosnących złożonych z liczb trójkątnych (zob. str. 23); niestety, priorytet ma tu A. Gérardin. Ukazała się już praca D. H. Lehmera *On a problem of Störmer*, Illinois J. Math. 8(1964), 57-79, anonsowana w Amer. Math. Soc. Notices (zob. notkę na str. 46).

Andrzej Mąkowski

A. Włodzimierz Mostowski, *Rozwiązywanie równań algebraicznych*, Biblioteczka Matematyczna, t. 16, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1964, str. 176.

Prawie połowa tej książki dotyczy liczb zespolonych, równań kwadratowych i pierwiastków z jedności, potem jeden rozdział zawiera zasadnicze twierdzenie algebry ze szkicem dowodu i dopiero od str. 100 począwszy mówi się naprawdę o rozwiązywaniu równań wyższych stopni.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Liczby zespolone Autor wprowadza jako wielomiany (dwumiany) $a+bi$, gdzie i raz nazywa się zmienną (np. na str. 15), a raz symbolem (na str. 25) i jest poddane warunkowi $i^2 = -1$. Wiadomo, że można zdefiniować ciało liczb zespolonych jako najmniejsze rozszerzenie ciała liczb rzeczywistych, w którym rozpada się wielomian x^2+1, i nie troszczyć się o istnienie takiego rozszerzenia, albo też liczby zespolone efektywnie zbudować, co zagwarantuje niesprzeczność arytmetyki zespolonej, jeśli niesprzeczna jest arytmetyka rzeczywista. Autor poszedł drogą jakby pośrednią: pisząc dla czytelnika, który nie zna algebraicznego pojęcia wielomianu nad ciałem, potraktował najpierw i jako zmienną, a potem chyłkiem przeszedł na nieoznaczoną („symbol"), właściwie zatem wprowadził liczby zespolone aksjomatycznie, ale z jakimiś pozorami konstrukcji. Wątpliwości egzystencjalne są tu przerzucone de facto na inne miejsce: czy istnieje pierścień wielomianów nad ciałem i jego ciało ilorazowe przy dzieleniu przez pewien ideał maksymalny ? Nie mogąc tłumaczyć tych spraw czytelnikowi Autor uczyniłby lepiej, gdyby wprowadził liczby zespolone czysto formalnie jako $a+bi$ ($i^2 = -1$), a więc ograniczył się do tego, co napisał we wstępie, jeśli mu zaś zależało na konstrukcji, to niepotrzebnie cofnął się przed metodą par, o której tylko niejasno wspomina. Podobne lawirowanie między dążeniem do ścisłości a unikaniem wszelkich naprawdę ścisłych, choćby prostych sformułowań, widać w całej książce, także w innych miejscach omawianego rozdziału, np. w kwestii zawierania się ciała liczb rzeczywistych w ciele liczb zespolonych. Nie wprowadzając ani pojęcia, ani nazwy izomorfizmu Autor długo tłumaczy, na czym polega owo zawieranie i wdaje się w subtelne rozróżnienie znaczenia znaku $+$ w notacji $a+bi$ i przy dodawaniu dwóch liczb zespolonych, na użytek czytelnika, od którego się przecież nie wymaga, by rozróżniał dodawanie wyrazów w wielomianie od dodawania wielomianów.

Już we wstępie i w rozdziale I znajduje się dużo lokalnych potknięć i niezręczności dotyczących zarówno języka jak i treści lub obu tych rzeczy naraz. Na str. 6 kilka razy „stwierdzenie" zamiast „twierdzenie". Ciężkie słowo „stwierdzenie" (= konstatacja) jest ostatnio w modzie, ale trzeba pamiętać, że żadne stwierdzenie nie może być fałszywe. Na tej samej stronicy Autor uważa powiedzenie „para liczb całkowitych p i q jest liczbą wymierną" za precyzyjniejsze niż „ułamek p/q jest liczbą wymierną", a ponadto używa określenia „odcinek taki a taki jest liczbą wymierną".

Na str. 7 Autor twierdzi, że w XX wieku żaden matematyk nie zapyta „co to jest to, nad czym pracuje mój kolega ?", a tylko „jakie własności ma to, nad czym pracuje mój kolega ?". Nieprawda! Gdy nie rozumiemy znaczenia terminu, pytamy „co to jest ?" i zwykle dostajemy odpowiedź na to właśnie pytanie, choć często dopiero po dłuższych wyjaśnieniach. Tylko czasami i tylko u podstaw wprowadza się definicje aksjomatyczne i wcale nie jest jedną z istotnych cech matematyki „wyeliminowanie z niej (z czego więc ostatecznie ?) pytania «co to jest ?»". Pytaniem „Co to jest ?!" reaguje recenzent na taką stenografię w sądach filozoficznych, i to w książce popularnej. Stenograficznie też Autor potraktował historyczny rozwój pojęcia liczby (tytuł paragrafu na str. 12): myśliwy widząc trzy zwierzęta pasące się na łące, pokazywał trzy palce itd. Nie trzy zwierzęta, tylko troje zwierząt, a w ogóle Autor przecenia rolę zwierząt w genezie pojęcia liczby całkowitej.

W rozdziale I Autor tłumaczy, dlaczego prawa dotyczące dodawania pozostawia bez sprawdzenia, *choć* (podkreślenie moje) są dużo łatwiejsze, jakby sprawdzenia wymagały najbardziej rzeczy łatwe. Na str. 20 wprowadza się liczbę zespoloną jeden „zwaną prościej jedynką". Ani to prostsze, ani poprawne: jedynka, to nazwa cyfry.

W rozdziale II i dalej Autor pisze stale „wyróżnik $\Delta = b^2-4ac$ równa się...", przez co przyczynia się do utrwalenia w umyśle czytelnika nawyku łączenia litery Δ z nazwą wyróżnika i zastępowania słowa przez literę, która urosła do rangi terminu. Skutek jest taki, że uczeń mając do czynienia z dwoma równaniami będzie mówił „delta jednego równania" i „delta drugiego równania", podobnie jak nieraz mówi „Ve kuli",

a nawet pisze V_{kuli}. Każda książka matematyczna popularna powinna być lekcją poprawnego wyrażania myśli przez słowa i symbole, a w szczególności powinna pokazywać, jak się używa oznaczeń i do czego służą, bo szkoła najczęściej tego nie uczy.

Autor niepotrzebnie zniża się do złego języka słabych studentów, którzy gmatwają wysłowienie twierdzeń zawiłością gramatyki, zbędnymi słowami i nadmiarem oznaczeń. Najjaskrawiej wystąpiło to w twierdzeniu na str. 70:

„Jakiekolwiek byśmy wzięli równanie algebraiczne o współczynnikach rzeczywistych

$$z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0,$$

gdzie $a_1,\ldots,a_{n-1},a_n$ są liczbami rzeczywistymi i rozpatrywalibyśmy wszystkie jego pierwiastki zespolone, włączając w to i pierwiastki rzeczywiste, to operacja sprzężenia liczb zespolonych przeprowadzi ten zbiór na siebie".

Słowo „rozpatrywalibyśmy" wypada ze składni, z brania i rozpatrywania nic nie wynika, założenie, że współczynniki są rzeczywiste, napisane jest dwa razy, a o jaki zbiór chodzi, niezupełnie wiadomo. Gdyby Autor nie starał się tak bardzo pisać ad usum delphini i sformułował to twierdzenie jak matematyk, to delfin zrozumiałby lepiej i prędzej.

Na str. 45 „korzystając z tego wzoru", a żadnego wzoru nie ma. W rozdziale „Geometryczna teoria liczb zespolonych" mówi się stale „wydłużamy o r" zamiast „r razy". To nie przelewki! Płaszczyzna Gaussa, to na str. 56 zbiór liczb $a+bi$, a na str. 71 tenże zbiór uzupełniony punktem w nieskończoności.

W rozdziale o zasadniczym twierdzeniu algebry jest takie tajemnicze zdanie: „tyle potknięć ludzkiego umysłu, związanych z historią jednego zagadnienia, wystarczy, żeby — niezależnie od rzeczywiście dużego jego znaczenia — mieć wątpliwości co do genezy użytej nazwy".

Dowód zasadniczego twierdzenia algebry naszkicowany jest dobrze, tylko zdaniem moim własności przekształcenia $u=z^n$ nie staja się wyraźniejsze, gdy zamiast „punkt z" mówi się „mucha M_z", a zamiast „punkt u" „mucha M_u". Nie wiem, po co Autor mówi w tej książce o powierzchniach Riemanna, a już całkiem nie rozumiem, dlaczego o funkcji $u=z^2$ pisze się „funkcja" w cudzysłowie, a potem tę „funkcję" (znów cudzysłów) oznacza się symbolem $z=\sqrt{u}$. A co ma z tego zrozumieć czytelnik ? W rozdziale o logarytmie i sinusie zespolonym (mimochodem, dlaczego Sin i Cos ?) punkt $u=0$ rzekomo nie jest obiegany, a tymczasem on jest po prostu ominięty.

Na str. 107 i 108 we wzorach Cardana 10 razy wydrukowano p zamiast q. Takie niedbalstwo korekty w książce przeznaczonej dla mało krytycznego czytelnika od razu obniża wartość dzieła. W rozdziale o równaniu 4-go stopnia pisze się, że trzeba wyraz x^4 uzupełnić do pełnego kwadratu, a żeby czytelnik się nie dziwił, bo przecież wyraz x^4 sam jest kwadratem, to mu się wyjaśnia, że jednak chodzi o uzupełnienie tego wyrazu do pełnego kwadratu.

Informuje się czytelnika o odkryciu Abela, że równanie 5-go stopnia nie daje się rozwiązać przez pierwiastniki, ale niezupełnie stąd widać, co właściwie Abel udowodnił, tym bardziej, że w kontekście podaje się wyspecjalizowany przykład równania nierozwiązalnego przez pierwiastniki, a później dopiero, wspominając o teorii Galois, pisze się, że równania stopnia piątego i wyższych o współczynnikach dowolnych nie są rozwiązalne przez pierwiastniki. Nie wiadomo, co tu znaczą współczynniki dowolne, ponadto rezultaty Abela i Galois wydają się pomieszane ze sobą, a żaden z nich nie jest poprawnie wysłowiony.

Podaje się następnie praktyczne sposoby rozwiązywania równań stopnia 3-go, a potem następują rozdziały o metodach przybliżonych dla równań wyższych stopni. To practicum zawiera znacznie mniej niejasności, omyłek, powtórzeń i niekonsekwen-

cji niż tekst wcześniejszy. Szkicuje się i pokazuje się na przykładach między innymi metodę Newtona dla równań stopnia 3-go, potem ogólnie metodę stycznych, regulam falsi, postępowanie mieszane, metodę Graeffego i tzw. iteracyjną. Nie podaje się dowodów, co można (nawet należy) usprawiedliwić. Także prawie nie dyskutuje się błędów, co już znacznie ogranicza praktyczną przydatność wiedzy nabytej z tych rozdziałów. Nie omawia się też koniecznych ostrożności przy stosowaniu metody Newtona (tj. metody stycznych), związanych z kształtem wykresu. Niedbałe sformułowania i w tej części książki się zdarzają, np. w paragrafie dotyczącym metody Graeffego pisze się: musimy tu korzystać z zasadniczego twierdzenia algebry... choć nie jest to konieczne.

Informuje się o zastosowaniu maszyn elektronowych do rozwiązywania równań i o metodzie Monte Carlo. Książkę zamykają uwagi historyczne.

Ze wszystkiego, co recenzent dotąd napisał, wynika, że pożytek z tej książki dla czytelnika jest niewielki. Pod względem matematycznym lektura go nie rozwinie, bo książka zawiera bardzo pomieszany materiał, nic w niej nie jest wyłożone ściśle ani też nie ukazuje się głębi przez jakąś próbę przystępnego ujęcia wielkich ogólnych problemów, np. teorii Galois. Pod względem praktycznym czytelnik również nie skorzysta na tyle, by mógł samodzielnie rozwiązywać numerycznie równania wyższych stopni z jakim takim pojęciem o popełnianym błędzie. Natomiast będzie musiał z trudem przedzierać się przez mielizny (liczby zespolone!) i potykać się o niejasne i niedbałe sformułowania, wyjątkowo liczne w tej książce.

Od Autora, który jest znanym matematykiem i autorem cennych prac z teorii grup, oczekujemy celowszych, bardziej przemyślanych, a przede wszystkim staranniejszych pozycji popularnych.

Stanisław Hartman

Edward Piegat, *Wektory i geometria*, Biblioteczka Matematyczna, t. 18, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1964, str. 135.

Książka składa się z dwu rozdziałów: pierwszy z nich poświęcony jest algebrze wektorów, drugi — zastosowaniu wektorów do geometrii i trygonometrii. Brak jest natomiast przedmowy czy wstępu, w którym autor wyłożyłby swoje założenia, jakie przyświecały mu przy pisaniu dzieła. Recenzent zdany jest przeto wyłącznie na dwie wskazówki. Jedną z nich jest tytuł książki, a drugą nazwa serii, w której została ona wydana.

Oba te czynniki wskazują, że zamierzenia były ambitne. W tytule użyto słowa „geometria". Od dawna na przykładzie geometrii pokazywano piękno metody dedukcyjnej, w której opierając się na jasno sprecyzowanych definicjach można czystym rozumowaniem, a więc bez odwoływania się do doświadczenia, dowodzić skomplikowanych twierdzeń. Z drugiej strony, książka przeznaczona jest w zasadzie dla nauczycieli, a więc dla ludzi z pewnym przygotowaniem naukowym, którzy nie tylko jasno muszą sobie zdawać sprawę ze znaczenia słów *definicja* czy *dowieść*, ale muszą tę wiedzę przekazywać innym. Można przejść do porządku dziennego nad tym, że maturzysta zapomni po pewnym czasie wszystkie pojęcia i twierdzenia, których nauczył się w szkole, ale jest źle, jeżeli zapomni (lub co gorsza, zostanie źle nauczony), jaka jest różnica między słowem *dowieść* w matematyce a w potocznym znaczeniu.

Żeby w ogóle móc mówić o dowodach, trzeba najpierw podać definicje wszystkich terminów występujących w sformułowaniu twierdzenia. W przeciwnym wypadku umieszczanie tytułu *Dowód* na początku rozumowania jest po prostu nadużyciem. Niestety, przy takim podejściu do zagadnienia, żadne twierdzenie w omawianej książce nie zostało udowodnione, pomimo że autor używa (a więc nadużywa) tego słowa często.