Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Już bowiem przy definicji podstawowego pojęcia wektora napotykamy niejasności. Definicja kierunku prostej (str. 7) jest taka: *Kierunek jest to taka własność prostej, którą mają również wszystkie proste równoległe do niej.* Łatwo zauważyć, że z definicji tej wynika od razu: Własność „zawierać nieskończenie wiele punktów" jest kierunkiem.

Zwrot wektora umiejscowionego (tzn. związanego) „definiuje się" w zależności od tego, czy strzałki wyobrażające te wektory są zwrócone w tę samą stronę czy też w przeciwne strony (str. 7). Wektor swobodny jest odcinkiem z wyróżnionym początkiem, przy czym dwa wektory swobodne są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe długości, ten sam kierunek i zgodne zwroty. Ale co to jest zwrot wektora swobodnego, nie dowiadujemy się nigdy. Podana poprzednio „definicja" zwrotu wektora umiejscowionego odnosi się tylko do przypadku wektorów leżących na jednej prostej. „Definicję" wektora swobodnego wyjaśnić ma następujące zdanie: *Różnica między wektorami umiejscowionymi i swobodnymi polega na inaczej określonej równości dwu wektorów.* A więc jako obiekty, wektory umiejscowione i swobodne, to raz to samo, a raz co innego. Różnica jest subtelna, a właściwie to jej nie ma, bo dwa przedmioty albo są identyczne, albo nie i równości na różne sposoby określać nie można. Matematycy używają tu czasami wybiegu w postaci terminu *równoważność*, którego jednak autor konsekwentnie unika.

Podobna sytuacja powstaje przy definicji iloczynu wektorowego (str. 42 i 43). Zaczyna się ona od pojęcia skrętności układu i słów: *Zbliżmy lewą dłoń do wspólnego początku wektorów...*, po których następuje zdanie: *Teraz możemy przejść do zdefiniowania iloczynu wektorowego.* Czyżby autor zapomniał, że uważny czytelnik, który chciałby dokładnie prześledzić wszystkie następujące po tym „dowody" twierdzeń o iloczynie wektorowym, musiałby w każdym z nich w odpowiedniej chwili „zbliżać lewą dłoń" do czegoś bardzo abstrakcyjnego, a inwalida bez lewej ręki w ogóle nie mógłby „dowodzić" takich twierdzeń.

Z mniej istotnych usterek należy wymienić kilka fałszywych twierdzeń np. twierdzenie Desargues'a z zad. 39 (str. 117) i twierdzenie z zad. 40 (str. 119). Występujące tam boki mogą być równoległe i nie przecinać się w żadnym punkcie. Błąd powstał przez mechaniczne przeniesienie sformułowania z geometrii rzutowej na grunt geometrii afinicznej. Również ćwiczenie 22 na str. 41 wymaga rzeczy niemożliwej; trzeba dodać, że chodzi tam o równoległość ze zwrotem zgodnym.

Razi nieco stosowanie terminologii odbiegającej miejscami od ogólnie przyjętej we współczesnym piśmiennictwie polskim, np. wektor *umiejscowiony* zamiast *związany* czy *ort* zamiast *wersor*. To ostatnie wydaje się szczególnie niebezpieczne w zestawieniu z przyjętymi terminami: *ortogonalny i ortonormalny*.

Również pewne naiwności w sformułowaniach niczego nie upraszczają a kolidują z precyzją. Np. sformułowanie twierdzenia Chaslesa: *Rzut sumy kilku wektorów na prostą jest równy...* Twierdzenie to jest prawdziwe także dla kilkunastu i więcej wektorów.

Reasumując, książka nie daje odpowiedzi na pytanie, co to są wektory; podaje natomiast praktyczne wskazówki, jak operować tymi bliżej niesprecyzowanymi pojęciami. Z tego punktu widzenia jest godna polecenia dla fizyków i inżynierów. Szkoda natomiast, że z tytułu *Wektory i geometria* tylko pierwsze słowo znalazło odbicie w treści książki.

Karol Sieklucki

Béla Sz. Nagy, *Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1964, str. XI+447.

Książka ta jest angielskim tłumaczeniem podręcznika dla studentów matematyki, wydanego po raz pierwszy po węgiersku w roku 1954. Jak pisze autor we wstępie, za-

warty w niej materiał stanowi z niewielkimi zmianami treść wykładu funkcji rzeczywistych na uniwersytetach węgierskich. Oto spis rozdziałów: 1. Zbiory, 2. Funkcje ciągłe, 3. Różniczkowanie, 4. Funkcja przedziału. Całka Riemanna, 5. Całka Lebesgue'a, 6. Całka Stieltjesa i jej uogólnienia, 7. Przestrzenie funkcji całkowalnych, 8. Zbieżność i sumowalność szeregów Fouriera. Jak widać z tego spisu, nie pokrywa się on z programem funkcji rzeczywistych na polskich uniwersytetach. Pierwszy rozdział wykłada się u nas we wstępie do matematyki na pierwszym roku studiów matematyki oraz we wstępie do topologii na drugim. Fragmenty rozdziałów drugiego, trzeciego, czwartego i ósmego należą do materiału obowiązującego na wykładach analizy matematycznej. Niektóre zagadnienia, przede wszystkim z szeregów Fouriera, wchodzą u nas jedynie w zakres wykładów monograficznych. Mimo tych różnic programowych, książka B. Sz.-Nagy'a może być u nas z pożytkiem używana szczególnie przez zdolniejszych studentów pierwszych lat studiów matematyki oraz studentów sekcji ogólnej matematyki, pragnących poszerzyć i pogłębić wiadomości z wykładów. Jest to bowiem książka przeznaczona dla czytelnika na średnim poziomie, a takich książek brak u nas. Może właśnie dlatego, chcąc podkreślić jej charakter podręcznikowy, nazwał ją autor „wstępem". Nie jest jednak ujmą dla podręcznika, że napisany jest w sposób zrozumiały dla czytelników. A w tym wypadku napisany znakomicie. Autor podaje obszerny materiał w sposób, który musi obudzić zainteresowanie czytelnika, do którego książka jest adresowana. Przyczyniają się do tego między innymi umiejętnie włączone w treść dane historyczne, których niemal kompletnie brak w naszych podręcznikach, a w najlepszym razie redukują się do luźnych notek. Przede wszystkim jednak przyczynia się do tego sposób pisania, wskazujący na umiejętności dydaktyczne autora, a także układ materiału. Układ ten polega na unikaniu sformułowań bardzo ogólnych, ewentualnie podawanie ich na końcu, w sposób skrócony. Na przykład pojęcie funkcjonału liniowego nad daną przestrzenią określa się osobno na str. 250 dla przestrzeni funkcji ciągłych, na str. 303 dla przestrzeni Hilberta, na str. 363 dla przestrzeni L^p, a dopiero na str. 370 ogólnie dla dowolnej przestrzeni Banacha, przy czym za każdym razem powtarza się trzy warunki:

$$L(f_1+f_2) = L(f_1)+L(f_2), \quad L(cf) = cL(f), \quad |L(f)| \leqslant M\|f\|.$$

Ten sposób przedstawienia, w którym wychodzi się z konkretnych przypadków i dopiero na końcu dochodzi się do uogólnienia, czyni książkę szczególnie pożyteczną dla początkujących, natomiast zmniejsza jej użyteczność dla czytelnika już zaawansowanego.

Przechodząc do szczegółowego omówienia treści książki można powiedzieć, że pierwszy rozdział stanowi klasyczne wprowadzenie w teorię mnogości oraz w topologię przestrzeni euklidesowych. Autor wprowadza również pojęcia pierścienia i σ-pierścienia zbiorów, natomiast nie określa algebry zbiorów.

W rozdziale drugim omawia ciągłość i na wpół ciągłość funkcji oraz jednostajną i quasi jednostajną zbieżność ciągów funkcji, podając na końcu uwagę o klasyfikacji Baire'a funkcji. Dalszą część rozdziału zajmuje problem aproksymacji funkcji ciągłych wielomianami wraz z dowodem Lebesgue'a twierdzenia Weierstrassa oraz dowodem twierdzenia Weierstrassa-Stone'a w podzbiorach zwartych przestrzeni euklidesowej. Rozdział kończy studium funkcji monotonicznych oraz funkcji o skończonej wariacji.

Trzeci rozdział o różniczkowaniu zaczyna się przykładem van der Waerdena funkcji ciągłej bez pochodnej. Dalej następuje dowód Riesza twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowalności prawie wszędzie funkcji monotonicznej, przeprowadzony dla funkcji ciągłych, a następnie naszkicowany dla dowolnych funkcji. W dowodzie tym, podobnie jak w całym rozdziale trzecim z wyjątkiem twierdzenia Lebesgue'a o gęstości, autor unika operowania pojęciem miary Lebesgue'a oraz miary zewnętrznej Le-

besgue'a, poprzestając na pojęciu zbiorów miary zero. Na końcu rozdziału autor pogłębia analizę pochodnych Diniego, dowodząc twierdzenia Denjoy-Younga-Saksa.

Podstawę rozdziału czwartego stanowi pojęcie całki $\int_a^b \varphi(da)$ z wielowartościowej na ogół funkcji przedziału $\varphi(a, \beta)$, gdzie $(a, \beta) \subset (a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$. Całka ta, zwana całką Burkilla, określona jest jako granica sum $\sum_{k=1}^{n} \varphi(a_{k-1}, a_k)$ przy normalnym ciągu podziałów $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ przedziału (a, b). Dla dalszych rozważań istotne znaczenie mają dwa twierdzenia fundamentalne. Pierwsze z nich mówi, że jeżeli całka z nieujemnej funkcji zbioru $\varphi(a, \beta)$ w (a, b) istnieje i jest równa zeru, to $\varphi(a, \beta)$ ma pochodną równą zeru prawie wszędzie w (a, b), a drugie, że dla $\varphi(a, \beta)$ całkowalnej w (a, b) funkcje $\varphi(a, x)$ i $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(da)$ mają prawie wszędzie te same pochodne Diniego. Jako przykłady całki z funkcji przedziału podaje autor całki Darboux i Riemanna oraz długość łuku. W rozdziale szóstym dojdą do tego całki Stieltjesa. Dalsze części rozdziału czwartego poświęcone są całce Riemanna funkcji jednej i wielu zmiennych.

Rozdział piąty, omawiający całkę Lebesgue'a, rozpoczyna autor określeniem całek z funkcji schodkowych w przedziale (a, b). Następnie rozszerza definicję całki na klasę C_1 funkcji, które są prawie wszędzie granicami rosnących ciągów funkcji schodkowych $\varphi_n(x)$ takich, że ciąg całek $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ jest ograniczony. Wreszcie różnice funkcji z C_1, to funkcje całkowalne w sensie Lebesgue'a. W dalszym ciągu wykazuje autor twierdzenia graniczne w kolejności: twierdzenie Beppo Leviego, twierdzenie Lebesgue'a i lemat Fatou, a następnie bada związki całki Lebesgue'a z całką Riemanna i dowodzi różnych własności całek wraz z charakteryzacją przy pomocy absolutnej ciągłości. Funkcje mierzalne określa jako granice prawie wszędzie funkcji schodkowych, a miarę zbioru jako całkę z jego funkcji charakterystycznej. Rozdział kończy przedstawienie klasycznej teorii Lebesgue'a, w której do całki dochodzi się poprzez pojęcia miary i funkcji mierzalnej. Autor wykazuje równoważność obydwu definicji oraz twierdzenia Jegorowa i Łuzina, a wreszcie omawia krótko przypadek wielu zmiennych i wykazuje twierdzenie Fubiniego.

W rozdziale szóstym, po wprowadzeniu całki Riemanna-Stieltjesa i wykazaniu jej podstawowych własności autor zajmuje się ogólną postacią funkcjonału liniowego nad przestrzenią funkcji ciągłych, najpierw dla funkcjonałów nieujemnych, a potem dla dowolnych przez rozbicie funkcjonału liniowego na części dodatnią i ujemną. Dalej następują uwagi o całce Lebesgue'a-Stieltjesa, a na końcu zarys ogólnej, abstrakcyjnej teorii całki wraz z twierdzeniem o mierze produktowej. Brak natomiast twierdzenia Radona-Nikodyma oraz w ogóle omówienia dowolnych funkcji zbioru.

Rozdział siódmy zawiera wiadomości o przestrzeni L^2 i ogólniej, o przestrzeni Hilberta, własności układów ortogonalnych wraz z twierdzeniem Riesza-Fischera, ortogonalizację i ogólny kształt funkcjonału liniowego nad przestrzenią Hilberta. Bada się układ trygonometryczny z zastosowaniem do zagadnienia izoperymetrycznego, klasyczne układy wielomianowe oraz układy Haara i Rademachera. Bada się również całki Fouriera w L i w L^2, te ostatnie wprowadzone przy pomocy zastosowania wyraz po wyrazie przekształcenia Fouriera do rozwinięcia funkcji $f(x)$ w szereg Hermite'a. Rozdział jest zakończony teorią przestrzeni L^p z dowodami nierówności Höldera i Minkowskiego, zupełności L^p i wzoru na ogólny kształt funkcjonału liniowego nad L^p oraz krótkimi uwagami o przestrzeniach Banacha; szkoda, że w uwagach tych zabrakło danych historycznych, które tak uprzyjemniają lekturę wielu innych części książki.

Ostatni, ósmy rozdział, poprzedzony jest interesującymi uwagami historycznymi o zagadnieniach struny drgającej, przewodnictwa cieplnego i Dirichleta, wraz z uwagami o zastosowaniu szeregów Fouriera przy ich rozwiązywaniu. Rozdział ten obejmuje zagadnienia zbieżności oraz sumowalności szeregów Fouriera. Poza wzorem Dirichleta, twierdzeniem Riemanna-Lebesgue'a i twierdzeniem Riemanna o lokalizacji, rozdział ten zawiera kryteria zbieżności Diniego, Lipschitza i Dirichleta-Jordana, przykład Fejéra funkcji ciągłej o szeregu Fouriera rozbieżnym w punkcie i uwagi o szeregach sprzężonych wraz z twierdzeniem Lukácsa. W dalszym ciągu podano związki między zbieżnością, sumowalnością pierwszymi średnimi arytmetycznymi oraz sumowalnością Abela szeregów liczbowych, a wreszcie zastosowania tych metod sumowalności do szeregów Fouriera, jak twierdzenia Fejéra, Lebesgue'a i całkę Poissona.

Książka jest przetłumaczona dobrą angielszczyzną, pisownią amerykańską („neighborhood", „center" itp.) i ładnie wydana na dobrym papierze. Niestety, korektę przeprowadzono mało starannie i zostało wiele usterek drukarskich. Ponieważ większość z nich, to przestawienia czy opuszczenia liter, a żadna nie wprowadzi w błąd uważnego czytelnika, wydało mi się zbędne wypisywać tu listę znalezionych 25 usterek. Trudno jednak powstrzymać się od zacytowania rzadkiego curiosum: na str. 238, w wypisanym dużym, półtłustym drukiem tytule podrozdziału 6.1 czytamy „inearl functionals". Wydaje się, że redaktorzy powinni przeczytać przy korekcie choć tytuły rozdziałów.

Na zakończenie warto podkreślić jeszcze raz użyteczność tej książki dla studiujących matematykę, którym pragnąłbym ją jak najbardziej polecić.

Julian Musielak

A. P. Robertson, W. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 53, University Press, Cambridge 1964, str. VIII+158.

Teoria operacji liniowych rozwijała się dwoma głównymi nurtami: 1° teoria przestrzeni Hilberta mająca swój punkt ciężkości w teorii spektralnej, a jako główne pole zastosowań teorię kwantów, oraz nieskończenie wymiarowe reprezentacje grup lokalnie zwartych; 2° ogólna teoria przestrzeni wektorowych topologicznych rozwijana przed wojną głównie w szkole lwowskiej i której badania znalazły swój klasyczny wyraz w monografii Banacha.

Przedwojenna literatura monograficzno-podręcznikowa była dość uboga. Obecnie przeżywamy zalew monografii z ogólnej teorii przestrzeni lokalnie wypukłych, co jest oznaką, że główne zręby teorii zostały zbudowane. Jak wiadomo, każdą następną książkę jest z jednej strony pisać coraz łatwiej wykorzystując doświadczenia i błędy poprzednika, z drugiej strony trudniej, bo wymagania czytelników rosną i nasuwa się zawsze pytanie, czy nowa książka była potrzebna, czy raczej nie należyło wznowić dotychczas istniejących ?

Recenzowana tu książeczka małżeństwa Robertsonów wydaje się być potrzebną pozycją, a to z dwóch względów:

1° wyróżnia się umiejętnym wyborem materiału,

2° napisana jest jasno, przystępnie, taktownie: wszystkie potrzebne wiadomości z ogólnej topologii podaje w odpowiednich partiach książki, nie odstraszając „nietopologicznego" czytelnika.

Materiał 150-stronicowej książeczki podzielony jest na 8 rozdziałów: I. „Definicje, elementarne własności" doprowadza do pojęcia przestrzeni lokalnie wypukłych. Rozdziały II i III stanowią pełny wykład teorii dwoistości Dieudonnégo-Mackeya-