ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VIII (1965)

wmptm 1897

Zadania

Gwiazdką * oznaczane są te zadania, których rozwiązanie nie jest znane autorowi ani redakcji, albo znane jest tylko rozwiązanie częściowe. Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, uwagi o zadaniach, nowe zadania itp.) należy nadsyłać pod adresem: Andrzej Lelek, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 1, ul. Śniadeckich 8. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

101*. Niech $f(t)$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na odcinku $[0,1]$ oraz niech

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 1.$$

Czy jeżeli $\{\xi_k\}$ jest ciągiem ograniczonym, dla którego istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n)\xi_k = \xi,$$

to musi być

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k = \xi\ ?$$

R. Jajte (Łódź)

102*. Czy istnieje liczba zespolona z i funkcja $f(t)$ całkowalna w sensie Riemanna na odcinku $[0,1]$ takie, że $\operatorname{Re} z > 1$ oraz

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n)z^k = 0\ ?$$

R. Jajte (Łódź)

103. Niech wartość średnia funkcji nieujemnej $f(x,y)$ na każdym kole o promieniu 1 będzie równa wartości tej funkcji w środku koła, czyli

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x_0+x, y_0+y)\,dx\,dy = f(x_0, y_0).$$

Dowieść, że $f(x, y)$ jest funkcją stałą [1].

W. F. Mołczanow (Moskwa)

104. Dla jakich a, b, c równanie

$$f(ax^2+bx+c) = f(x)$$

ma rozwiązanie w funkcjach ciągłych f, różnych od stałej?

D. Chadżijew (Moskwa)

105*. Niech X będzie przeliczalną przestrzenią topologiczną, całkowicie regularną. Udowodnić, że na X istnieje różnowartościowa funkcja ciągła o wartościach rzeczywistych. Dowieść, że jeśli istnieje przekształcenie ciągłe $f\colon X \to Y$ w przestrzeń Y z bazą przeliczalną, takie iż każdy przeciwobraz $f^{-1}(y)$ jest zbiorem zwartym i obraz $f(F)$ każdego zbioru F domkniętego w X jest domknięty w Y, to przestrzeń przeliczalna X ma bazę przeliczalną. Czy ostatnie twierdzenie pozostanie prawdziwe, jeśli „domknięty" zmienić w obu miejscach na „otwarty"?

A. W. Archangielski (Moskwa)

106. Dla każdej liczby t z odcinka $I = [0, 1]$ niech

$$t = (t_0, t_1 t_2 \ldots)_2$$

będzie rozwinięciem dwójkowym, zawierającym nieskończenie wiele zer.

Wzór

$$x_n(t) = t_n$$

określa dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ punkt x_n iloczynu kartezjańskiego

$$P = \prod_{t \in I} I_t,$$

gdzie $I_t = I$ dla $t \in I$. Dowieść, że zbiór

$$X = \{x_n\colon\ n = 1, 2, \ldots\}$$

z topologią wyznaczoną przez topologię Tichonowa w iloczynie P jest dyskretny oraz że jego domknięcie $\overline{X}$ w iloczynie P jest [2] uzwarceniem Čecha-Stone'a βX.

R. Engelking (Warszawa)

---

[1] Por. § 30 w książce: I. Pietrowski, *Równania różniczkowe cząstkowe*, Warszawa 1955.

[2] Przestrzeń $\overline{X}$ została określona przez A. Tichonowa w pracy: *Über einen Funktionenraum*, Math. Ann. 111 (1935), str. 762-766.

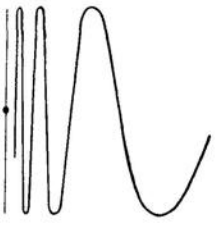
107. Niech będzie dany system odwrotny $\{T, F, g\}$ przestrzeni dwuzwartych F_t z dowolnym zbiorem wskaźników T ([3]). Załóżmy, że dla każdej pary wskaźników $t_0 \prec t_1$ mamy $F_{t_0} \subset F_{t_1}$ oraz że funkcja $g_{t_0}^{t_1}\colon F_{t_1} \to F_{t_0}$ jest retrakcją. Wykazać, że jeśli wszystkie przestrzenie F_t mają własność punktu stałego, to granica systemu $\{T, F, g\}$ też ma własność punktu stałego ([4]).

R. Engelking (Warszawa)

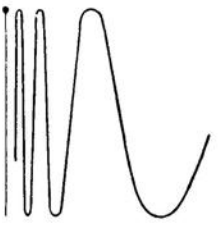
108. Przez *sinusoidę* i *spiralę* będziemy rozumieli zbiory

$$\{(x, y)\colon y = \sin(\pi/x),\ 0 < x \leqslant 1\} \quad \text{i} \quad \{(\varrho, \theta)\colon \varrho = \theta/(1+\theta),\ 0 \leqslant \theta < \infty\},$$

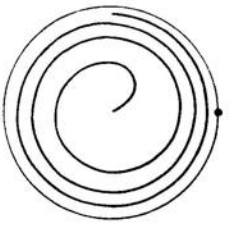
odpowiednio. Sinusoida zagęszcza się do odcinka $[-1, 1]$ osi y-ów, a spirala zagęszcza się do okręgu $\varrho = 1$. Dowieść, że zbiory otrzymane po dodaniu do sinusoidy jakiegokolwiek jednego punktu na odcinku zagęszczenia, a więc punktu, który może być zarówno wewnętrzny (rys. 1),



Rys. 1



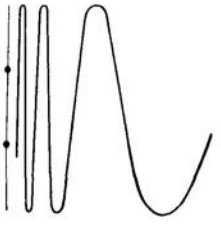
Rys. 2



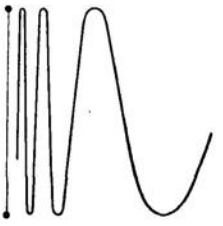
Rys. 3

jak końcowy na odcinku (rys. 2), lub otrzymane ze spirali po dodaniu jakiegokolwiek jednego punktu na okręgu zagęszczenia (rys. 3), są wszystkie homeomorficzne między sobą.

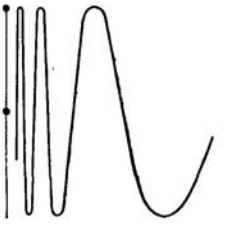
Dodajmy teraz do sinusoidy dwa punkty wewnętrzne na odcinku zagęszczenia (rys. 4) lub dwa jego punkty końcowe (rys. 5), lub wreszcie



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

([3]) K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1962 (II wydanie), str. 135.

([4]) Twierdzenie to dla przestrzeni F_t będących wielościanami udowodnili J. Mioduszewski i M. Rochowski, *Remarks on fixed point theorem for inverse limit spaces*, Colloq. Math. 9 (1962), str. 67-71.

dwa punkty, z których jeden jest wewnętrzny, a drugi końcowy (rys. 6). Które z tych trzech zbiorów są homeomorficzne?

W. Kuperberg (Warszawa)

109. Mówimy, że przestrzeń X ma *typ homotopii* przestrzeni Y, gdy istnieją dwa odwzorowania ciągłe $f: X \to Y$ i $g: Y \to X$ takie, że złożenia fg i gf są homotopijne z tożsamością. Niech $S(X)$ będzie *stożkiem* nad X, tj. przestrzenią powstającą z iloczynu kartezjańskiego $X \times [0, 1]$ przez zidentyfikowanie wszystkich punktów zbioru $X \times \{1\}$ w jeden punkt, zwany *wierzchołkiem* stożka. Dowieść, że jeżeli jakieś otoczenie wierzchołka stożka $S(X)$, otwarte w $S(X)$, jest homeomorficzne z przestrzenią euklidesową $(n+1)$-wymiarową, to przestrzeń X ma typ homotopii sfery n-wymiarowej.

Jan Mycielski (Wrocław)

110. Udowodnić bez pomocy pewnika wyboru, że jeżeli

$$\aleph_1 + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0},$$

to istnieje nieprzeliczalny zbiór liczb rzeczywistych, nie zawierający żadnego podzbioru doskonałego niepustego.

Jan Mycielski (Wrocław)

111. Zbudować zbiór Z zwarty 0-wymiarowy na prostej rzeczywistej i funkcję ciągłą rzeczywistą f zmiennej rzeczywistej, kawałkami monotoniczną, spełniające warunek, iż dla każdego t z odcinka $0 \leqslant t \leqslant 1$ istnieją punkty $p_t, q_t \in Z$ takie, że

$$|p_t - q_t| = t, \quad f(p_t) = f(q_t).$$

A. Lelek (Wrocław)

112*. Przestrzeń metryczną nazywamy *triodem*, jeśli jest ona sumą trzech łuków (tj. obrazów homeomorficznych odcinka prostoliniowego), z których każde dwa mają dokładnie jeden i ten sam punkt wspólny, będący końcem wszystkich trzech łuków. Czy dla każdego triodu T istnieje liczba $a(T) > 0$ taka, że dla każdej funkcji ciągłej rzeczywistej f, określonej na T, istnieją punkty $p_f, q_f \in T$ takie, że

$$\varrho(p_f, q_f) = a(T), \quad f(p_f) = f(q_f),$$

gdzie ϱ jest metryką w przestrzeni T?

A. Lelek (Wrocław)

113. Zbudować zbiór Z zwarty 0-wymiarowy na płaszczyźnie, taki że każde ograniczenie obszaru wypukłego, rozcinające płaszczyznę między punktami zbioru Z, przecina zbiór Z. Inaczej mówiąc, do każdego punktu zbioru Z istnieją dowolnie małe otoczenia, których ograniczenie leży poza zbiorem Z, ale nie istnieją wypukłe otoczenia o tej własności.

A. Lelek (Wrocław)

114. Niech $Q_1, \ldots, Q_m$ będą kulami w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej E^n. *Atomem* układu $Q_1, \ldots, Q_m$ nazywamy każdy zbiór postaci

$$A = Q_1^{i_1} \cap \ldots \cap Q_m^{i_m},$$

gdzie $i_j = \pm 1$, $Q_j^1 = Q_j$ oraz $Q_j^{-1} = E^n - Q_j$ dla $j = 1, \ldots, m$. Atom A odpowiada tutaj ciągowi $i_1, \ldots, i_m$; atomem *przeciwnym* do atomu A nazywamy atom odpowiadający ciągowi $-i_1, \ldots, -i_m$. Dowieść, że jeśli atom skończonego układu kul w przestrzeni E^n jest niepusty, to atom przeciwny tego układu jest spójny.

A. Lelek (Wrocław)

115*. Dowieść, iż dla $n = 5$ istnieje na płaszczyźnie $2n+2 = 12$ punktów takich, że liczb dodatnich będących odległościami między nimi jest tylko n. Czy 5 jest najmniejszą spośród liczb n o tej własności?

W. Holsztyński (Warszawa)

116*. Niech $r = r(s)$ będzie równaniem danej krzywej płaskiej Γ klasy C^3. Oznaczmy przez $P(s, \varphi)$ parabolę ściśle styczną ([5]) do krzywej Γ w punkcie $r(s)$, mającą oś o kierunku φ. Przedstawić parametr paraboli $P(s, \varphi)$ jako funkcję zmiennych s i φ, tj. liczbę $p(s, \varphi) > 0$ taką, że parabola $P(s, \varphi)$ ma równanie kanoniczne

$$2p(s, \varphi)x - y^2 = 0.$$

Znaleźć krzywą, po której porusza się ognisko paraboli $P(s, \varphi)$ przy zmiennym s i ustalonym $\varphi = \varphi_0$, jak również krzywą dla ustalonego $s = s_0$ i zmiennego φ.

W. Holsztyński i *W. Włodarski* (Warszawa)

117. Oznaczmy przez $d(X, Y)$ *odległość absolutną* między przestrzeniami metrycznymi X i Y, tzn. kres dolny wszystkich odległości Haus-

([5]) M. Biernacki, *Geometria różniczkowa*, Warszawa 1954 (część I), str. 60.

dorffa między obrazami izometrycznymi przestrzeni X i Y we wspólnych nadprzestrzeniach. Dokładniej rzecz biorąc, mamy

$$d(X, Y) = \inf_{X', Y'} \max[\sup_{x \in X'} \inf_{y \in Y'} \varrho(x, y), \sup_{y \in Y'} \inf_{x \in X'} \varrho(x, y)],$$

gdzie X' i Y' są obrazami izometrycznymi przestrzeni X i Y, odpowiednio, w dowolnej wspólnej nadprzestrzeni metrycznej z metryką ϱ. Dowieść, że odległość absolutna $d(X, Y)$ jest równa kresowi dolnemu liczb d, dla których istnieją funkcje $f: X \to Y$ i $g: Y \to X$ o tej własności, iż nierówność

$$|\varrho(x_1, x_2) - \varrho(y_1, y_2)| \leqslant 2d$$

zachodzi dla dowolnych punktów $x_i \in X$, $y_i \in Y$ takich, że $f(x_i) = y_i$ $(i = 1, 2)$ lub $x_i = g(y_i)$ $(i = 1, 2)$.

Dowieść, że jeśli X, Y, Z są przestrzeniami metrycznymi, to

$$d(X, Z) \leqslant d(X, Y) + d(Y, Z),$$

oraz że równość $d(X, Y) = 0$ ma miejsce dla przestrzeni zwartych X i Y wtedy i tylko wtedy, gdy X i Y są izometryczne. Podać przykład niehomeomorficznych przestrzeni metrycznych zupełnych X i Y, dla których $d(X, Y) = 0$.

W. Holsztyński (Warszawa)

118. Niech X i Y będą przestrzeniami metrycznymi. Funkcja $f: X \to Y$ nazywa się *metryczna*, jeżeli

$$\varrho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \varrho(x_1, x_2)$$

dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$. Dowieść, że do każdej liczby kardynalnej nieskończonej $\mathfrak{n}$ istnieje przestrzeń metryczna $M_{\mathfrak{n}}$ o mocy $\mathfrak{n}$, dająca się odwzorować przez funkcję metryczną na dowolną przestrzeń metryczną o mocy nie większej niż $\mathfrak{n}$.

W. Holsztyński (Warszawa)

119*. Udowodnić, że dla żadnego $\varepsilon > 0$ przestrzeń funkcji metrycznych [6], odwzorowujących daną przestrzeń metryczną ośrodkową X w odcinek $[0, \varepsilon]$, nie daje się zanurzyć izometrycznie w X. Czy warunek ośrodkowości przestrzeni X jest istotny?

W. Holsztyński (Warszawa)

120. Niech będzie dana rodzina nieskończona zbiorów A_t, gdzie t przebiega zbiór wskaźników T, taka że każdy zbiór A_t jest równoliczny ze zbiorem T. Przyporządkować każdej parze (t_1, t_2) różnych wskaź-

---

[6] Zob. zadanie 118.

ników odwzorowanie $\varphi_{t_2t_1}\colon A_{t_1} \to A_{t_2}$ wzajemnie jednoznaczne zbioru A_{t_1} na zbiór A_{t_2} tak, aby dla wszystkich liczb całkowitych $n \geqslant 2$ był spełniony następujący warunek:

(W_n) jeżeli $t_1, \ldots, t_n \in T$, $t_1 \neq t_2 \neq \ldots \neq t_{n-1} \neq t_n \neq t_1$ oraz $x \in A_{t_1}$, to

$$x \neq \varphi_{t_1t_n}\varphi_{t_nt_{n-1}} \cdots \varphi_{t_3t_2}\varphi_{t_2t_1}(x).$$

Wykazać ponadto, że ograniczając się do warunku (W_n) dla $n \geqslant 3$, można dodatkowo zażądać od odwzorowań $\varphi_{t_2t_1}$, aby dla dowolnych $t_1 \neq t_2$ i $x \in A_{t_1}$ zachodziła równość

$$x = \varphi_{t_1t_2}\varphi_{t_2t_1}(x),$$

tj. aby funkcje $\varphi_{t_1t_2}$ i $\varphi_{t_2t_1}$ były wzajemnie odwrotne.

W. Holsztyński (Warszawa)

Rozwiązania zadań

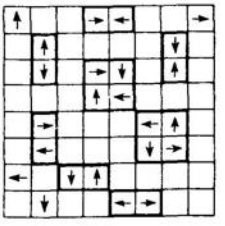
39. *Należy umieścić na każdym polu zwykłej szachownicy po jednej strzałce równoległej do boku pola, przestrzegając następujących zakazów:*

1° *żadna strzałka nie może być skierowana na zewnątrz,*

2° *żadna para pól o wspólnym boku nie może być zaopatrzona w strzałki o zwrotach przeciwnych,*

3° *na czwórkach pól mających jeden punkt wspólny nie mogą wystąpić wiry — tak nazywamy układy czterostrzałkowe odpowiadające takim czwórkom pól i złożone z samych różnych kierunków.*

Rysunek wyjaśnia powyższe postulaty: widzimy na nim 4 strzałki izolowane, z których każda wykracza przeciwko zakazowi 1°; *sześć par strzałek zaznaczonych sześcioma prostokątami wykracza przeciwko zakazowi* 2°; *dwie czwórki ujęte w kwadraty wykazują wiry — każda z nich narusza zakaz* 3°.



Autor zadania przypuszcza, że spełnienie wszystkich żądań zadania jest niemożliwe i że odnosi się to do wszelkich szachownic, a więc nie tylko do zwykłej szachownicy złożonej z 64 pól kwadratowych, ale także do prostokątnych szachownic złożonych z mn pól kwadratowych, przy czym liczby całkowite dodatnie m i n są dowolne.

H. Steinhaus (Wrocław)

Potnijmy płaszczyznę na kwadraty, tworząc z niej szachownicę o nieskończenie wielu polach. Będziemy rozpatrywali rodzinę $\boldsymbol{R}$, której elementami są jednospójne figury płaskie, będące skończonymi sumami pól, wraz z przyporządkowaniem