wmptm 1897

ników odwzorowanie $\varphi_{t_2t_1}\colon A_{t_1} \to A_{t_2}$ wzajemnie jednoznaczne zbioru A_{t_1} na zbiór A_{t_2} tak, aby dla wszystkich liczb całkowitych $n \geqslant 2$ był spełniony następujący warunek:

(W_n) jeżeli $t_1, \ldots, t_n \in T$, $t_1 \neq t_2 \neq \ldots \neq t_{n-1} \neq t_n \neq t_1$ oraz $x \in A_{t_1}$, to

$$x \neq \varphi_{t_1t_n}\varphi_{t_nt_{n-1}} \cdots \varphi_{t_3t_2}\varphi_{t_2t_1}(x).$$

Wykazać ponadto, że ograniczając się do warunku (W_n) dla $n \geqslant 3$, można dodatkowo zażądać od odwzorowań $\varphi_{t_2t_1}$, aby dla dowolnych $t_1 \neq t_2$ i $x \in A_{t_1}$ zachodziła równość

$$x = \varphi_{t_1t_2}\varphi_{t_2t_1}(x),$$

tj. aby funkcje $\varphi_{t_1t_2}$ i $\varphi_{t_2t_1}$ były wzajemnie odwrotne.

W. Holsztyński (Warszawa)

Rozwiązania zadań

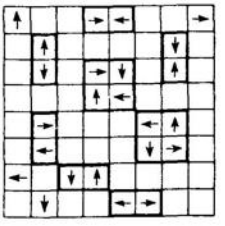
39. *Należy umieścić na każdym polu zwykłej szachownicy po jednej strzałce równoległej do boku pola, przestrzegając następujących zakazów:*

1° *żadna strzałka nie może być skierowana na zewnątrz,*

2° *żadna para pól o wspólnym boku nie może być zaopatrzona w strzałki o zwrotach przeciwnych,*

3° *na czwórkach pól mających jeden punkt wspólny nie mogą wystąpić wiry — tak nazywamy układy czterostrzałkowe odpowiadające takim czwórkom pól i złożone z samych różnych kierunków.*

Rysunek wyjaśnia powyższe postulaty: widzimy na nim 4 strzałki izolowane, z których każda wykracza przeciwko zakazowi 1°; *sześć par strzałek zaznaczonych sześcioma prostokątami wykracza przeciwko zakazowi* 2°; *dwie czwórki ujęte w kwadraty wykazują wiry — każda z nich narusza zakaz* 3°.



Autor zadania przypuszcza, że spełnienie wszystkich żądań zadania jest niemożliwe i że odnosi się to do wszelkich szachownic, a więc nie tylko do zwykłej szachownicy złożonej z 64 pól kwadratowych, ale także do prostokątnych szachownic złożonych z mn pól kwadratowych, przy czym liczby całkowite dodatnie m i n są dowolne.

H. Steinhaus (Wrocław)

Potnijmy płaszczyznę na kwadraty, tworząc z niej szachownicę o nieskończenie wielu polach. Będziemy rozpatrywali rodzinę $\boldsymbol{R}$, której elementami są jednospójne figury płaskie, będące skończonymi sumami pól, wraz z przyporządkowaniem

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

każdemu polu takiej strzałki równoległej do boku pola, że spełnione są warunki 1° i 2°. Udowodnimy przez indukcję względem liczby pól w figurach, że każda figura z rodziny $\boldsymbol{R}$ zawiera wir. W szczególności więc będzie wykazane, że przypuszczenie sformułowane w zadaniu było słuszne.

Rzeczywiście, minimalna liczba pól w figurach należących do rodziny $\boldsymbol{R}$ wynosi 4 i mamy tylko jedną taką figurę — jest ona sama wirem. Weźmy zatem pod uwagę dowolną figurę $F \in \boldsymbol{R}$ mającą $n > 4$ pól i przyjmijmy, że wszystkie figury z rodziny $\boldsymbol{R}$, których liczba pól nie przekracza $n-1$, zawierają wiry.

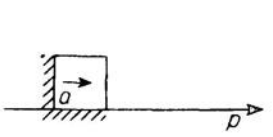
Wychodząc z dowolnego pola figury F i idąc w kierunku wyznaczonym przez strzałki, co zawsze jest możliwe wobec warunku 1°, dojdziemy wreszcie do pola, przez które już raz przechodziliśmy. Istnieje przeto zorientowany przez strzałki cykl C, utworzony z różnych pól figury F, kolejno przyległych do siebie bokami. Suma pól cyklu C może nie być jednospójna. Jeżeli jednak dodamy do niej wszystkie pola leżące w częściach płaszczyzny, ograniczonych przez cykl C, powstanie figura jednospójna G. Ponieważ pola cyklu C należą do F i figura F jest jednospójna, więc $G \subset F$. Wynika stąd, że figura G wzięta z tymi samymi strzałkami, które były na F, należy do rodziny $\boldsymbol{R}$. Obróćmy teraz wszystkie strzałki na polach figury G o kąt $+90°$ w orientacji płaszczyzny, wyznaczonej przez orientację cyklu C. Zauważmy, że warunki 1° i 2° zachowują się przy tym obrocie. Jeżeli więc figurę G ze strzałkami obróconymi o kąt $+90°$ oznaczymy przez F', to $F' \in \boldsymbol{R}$. Figury F' i G mają te same pola, a tylko inne strzałki.

Postępujemy następnie z figurą F' podobnie, jak poprzednio z figurą F, tj. tworzymy cykl C' i figurę jednospójną $G' \subset F'$, ograniczoną przez C'. Figura G', dziedzicząca strzałki z figury F', należy do rodziny $\boldsymbol{R}$. Wykażemy, że zachodzi co najmniej jeden z następujących dwóch przypadków:

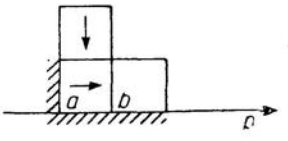
(I) Figura G zawiera wir.

(II) Figura G' ma mniej pól niż figura G.

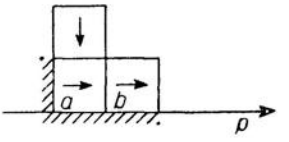
Istnieje mianowicie prosta pozioma p taka, że figura G leży w górnej półpłaszczyźnie i jakieś pole figury G przylega do p. Każde pole z G, przyległe do p, należy



Rys. 7

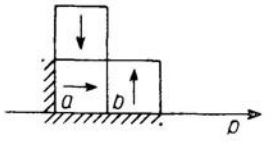


Rys. 8

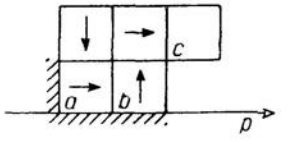


Rys. 9

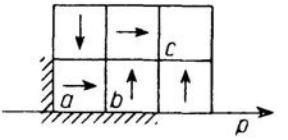
oczywiście do cyklu C, którego orientacja wyznacza zwrot prostej p. Niech a będzie najwcześniejszym spośród pól figury G, przyległych do p. Zbadamy, jak umieszczone są strzałki figury G w pobliżu narożnego pola a. Strzałka umieszczona na polu a musi mieć zwrot zgodny ze zwrotem prostej p (rys. 7), a przeto następne pole b też należy



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

do G (rys. 8). Jeżeli pola a i b mają takie same strzałki (rys. 9), to po obrocie o kąt $+90°$ żadna strzałka z dwóch pól figury G, przyległych bokami do pola a, nie wskazuje na pole a, czyli $a \notin G'$ i zachodzi przypadek (II). W przeciwnym razie strzałki na po-

lach a i b są ortogonalne (rys. 10). Wtedy jeżeli przypadek (I) nie ma miejsca, to pole c z górnej półpłaszczyzny, rozłączne z polem a i mające wspólny wierzchołek z polem b, należy do G (rys. 11). Ponieważ obydwa pola a i b należą do cyklu C, więc również $c \in C$. Skoro jednak cykl C składa się z samych różnych pól, a zatem w jego obiegu nie przechodzi się przez żadne pole dwukrotnie, przeto stosując to do pola c widzimy, iż nie może zajść sytuacja, w której strzałka na polu zawartym między polem c a prostą p byłaby taka sama, jak strzałka na polu b (rys. 12). Wynika stąd, że $b \notin G'$, czyli zachodzi przypadek (II).

Otóż na mocy założenia indukcyjnego przypadek (II) sprowadza się do przypadku (I). Istotnie, ponieważ $G \subset F$ i figura F ma n pól, więc w przypadku (II) figura G' ma co najwyżej $n-1$ pól. Zatem G' zawiera wir. Ponieważ $G' \subset F'$, to samo dotyczy figury F'. Obracając wszystkie strzałki figury F' o kąt $-90°$, otrzymujemy z powrotem figurę G. Przy tym obrocie wiry przechodzą na wiry, a więc mamy (I). W przypadku (I) figura F zawiera wir, bo $G \subset F$.

W. Szlenk (Warszawa)

50*. *Czy dla każdej liczby p przedziału $1 < p < 2$ istnieje* [7] *wielomian o współczynnikach zespolonych $a_0 + a_1 z + a_2 z^2$, taki że*

$$|a_0|^p + |a_1|^p + |a_2|^p = 1 \quad \text{oraz} \quad \sup_{|z|=1} |a_0 + a_1 z + a_2 z^2| < 1 \text{ ?}$$

A. Pełczyński (Warszawa)

Odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest twierdząca. Jeżeli bowiem $1 < p < 2$, to

$$\lim_{x \to 0+} \frac{p \ln(1-4x^2)}{2\ln(1-2x^p)} = 0,$$

skąd wynika, że dostatecznie blisko zera istnieje liczba $a > 0$ spełniająca nierówność

$$\frac{p \ln(1-4a^2)}{2\ln(1-2a^p)} < 1.$$

Zatem $2\ln(1-2a^p) < p\ln(1-4a^2)$, a więc także

$$4a^2 + (1-2a^p)^{2/p} < 1.$$

Żądany wielomian ma współczynniki $a_0 = a_2 = a$ oraz $a_1 = (1-2a^p)^{1/p} e^{i\pi/2}$. Rzeczywiście, suma p-tych potęg ich modułów jest równa 1 i dla każdego $z = e^{i\theta}$, gdzie $-\pi < \theta \leqslant \pi$, mamy

$$|a_0 + a_1 z + a_2 z^2| = \sqrt{\Phi(\theta)},$$

jeśli przyjąć

$$\Phi(\theta) = |a + (1-2a^p)^{1/p} e^{i(\theta+\pi/2)} + a e^{2i\theta}|^2.$$

Funkcja Φ w przedziale $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ osiąga kresy górne w punktach 0 i $\pm\pi$, bowiem $\Phi'(\theta) = -2a^2 \sin 2\theta$. Ale ponieważ

$$\Phi(0) = \Phi(\pi) = \Phi(-\pi) = 4a^2 + (1-2a^p)^{2/p},$$

więc kres górny pierwiastka kwadratowego z tej funkcji w przedziale $-\pi < \theta \leqslant \pi$ jest mniejszy od 1.

R. Jajte (Łódź)

---

[7] Istnienie takiego wielomianu dla $p = 1$ zostało wykazane w rozwiązaniu zadania 12, podanym przez R. Jajte (Roczniki PTM, Seria II: Wiadom. Mat. 5 (1962), str. 117).

55. *Udowodnić, że jeśli* $a > 0$, *to*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt[2^n]{a}}{2} = \frac{a-1}{\ln a}.$$

W. Holsztyński (Warszawa)

Przede wszystkim należałoby w zadaniu wyłączyć przypadek $a = 1$, wtedy bowiem traci sens wyrażenie po prawej stronie równości. Jeżeli jednak, na zasadzie dodatkowej umowy, za wartość tego wyrażenia dla $a = 1$ uważać jego granicę przy zmiennym $a \to 1$, to wówczas zastrzeżenie jest zbędne.

Niech $0 < a \neq 1$. Przez $p_n(a)$ oznaczmy n-ty iloczyn częściowy iloczynu nieskończonego występującego po lewej stronie równości. Ponieważ

$$\begin{aligned} 2^n p_n(a)(1-a^{2^{-n}}) &= 2^n \tfrac{1}{2}(1+a^{2^{-1}})\tfrac{1}{2}(1+a^{2^{-2}})\dots\tfrac{1}{2}(1+a^{2^{-n+1}})\tfrac{1}{2}(1+a^{2^{-n}})(1-a^{2^{-n}}) = \\ &= (1+a^{2^{-1}})(1+a^{2^{-2}})\dots(1+a^{2^{-n+1}})(1-a^{2^{-n+1}}) = \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= (1+a^{2^{-1}})(1-a^{2^{-1}}) = 1-a, \end{aligned}$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} p_n(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-a)2^{-n}}{1-a^{2^{-n}}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-a)x}{1-a^x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-a}{-a^x \ln a} = \frac{a-1}{\ln a}.$$

W przypadku $a = 1$ mamy $p_n(1) = 1$ dla $n = 1, 2, \dots$ oraz

$$\lim_{a\to 1} \frac{a-1}{\ln a} = \lim_{a\to 1} a = 1.$$

Z. Charzyński (Łódź)