ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VIII (1965)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Recenzje

J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Monografie Matematyczne tom 39, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1960, str. 172.

Pojęcie obiektu geometrycznego zawarte jest już w pracach G. Ricciego (1887) i F. Kleina (1909). W latach 1926-1932 wielu wybitnych geometrów (E. R. van Kampen, J. A. Schouten, J. M. Thomas, O. Veblen, J. H. C. Whitehead) podejmowało liczne próby ścisłego zdefiniowania pojęcia obiektu geometrycznego. Świadczy to, z jednej strony, że powstała w tym czasie potrzeba zdefiniowania tego pojęcia, z drugiej zaś, że jego sprecyzowanie przedstawiało duże trudności. Pierwszą poprawną definicję obiektu geometrycznego podał A. Wundheiler w roku 1934 na I Międzynarodowej Konferencji Geometrii Różniczkowej w Moskwie. Teorią obiektów geometrycznych zajmowało się wielu autorów. Ważny wkład w rozwój tej teorii wniósł również S. Gołąb. W oparciu o klasyczną definicję A. Wundheilera uzyskał S. Gołąb szereg interesujących wyników za pomocą równań funkcyjnych przy stosunkowo słabych założeniach regularności. Rozwój tej metody badań w teorii obiektów geometrycznych został znacznie przyspieszony, gdy zainteresował się nią J. Aczél, jeden z nielicznych specjalistów w teorii równań funkcyjnych. J. Aczélowi udało się uzyskać wiele wyników S. Gołąba przy jeszcze słabszych założeniach regularności. Owocem współpracy J. Aczéla i S. Gołąba w teorii obiektów geometrycznych jest właśnie recenzowana książka. Celem jej było:

1° Zebranie i usystematyzowanie wyników uzyskanych przez autorów bądź ich uczniów w teorii obiektów geometrycznych za pomocą równań funkcyjnych. Ze względu na dużą ilość prac i wyników z tego zakresu rozrzuconych po różnych czasopismach tego rodzaju usystematyzowanie stało się koniecznością, aby móc właściwie planować dalsze badania.

2° Przedstawienie najważniejszych pojęć i problemów teorii obiektów geometrycznych oraz metod ich rozwiązywania w ten sposób, by mogły być one zrozumiałe również dla czytelnika nie znającego tej teorii. Chodziło mianowicie o zainteresowanie teorią obiektów geometrycznych i wciągnięcie do współpracy możliwie szerokiego grona czytelników.

Wydaje mi się, że oba te cele zostały w pełni zrealizowane. Możliwie prosty i jasny sposób przedstawienia ułatwił specjalnie zrealizowanie drugiego z nich, co w tego typu publikacjach specjalistycznych wcale nie jest rzeczą łatwą. W sumie publikacja jest ważna i interesująca.

Jakkolwiek problem klasyfikacji równań funkcyjnych nie został dotychczas w pełni rozwiązany, to jednak wiadomo, że w teorii obiektów geometrycznych odgrywa rolę pewien specjalny typ równań funkcyjnych. Ten właśnie typ równań funkcyjnych jest rozpatrywany w omawianej książce, ich własności, metody rozwiązywania i wyniki. Treścią książki są więc dwa główne tematy: pewien typ równań

funkcyjnych i wyniki uzyskane za ich pomocą w teorii obiektów geometrycznych. Te dwa tematy znajdują swój wyraz zarówno w tytule książki (*Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*), jak również w sposobie redagowania wszystkich wyników. Każdy prawie wynik jest redagowany dwukrotnie. Z jednej strony jako wynik dotyczący pewnego równania funkcyjnego (ewentualnie układu równań), z drugiej jest interpretowany jako wynik w teorii obiektów geometrycznych.

Książka składa się z następujących części: I. Einleitung, II. Klassifikationstheorie, III. Algebra der Objekte, IV. Kovariante Ableitung, V. Weitere Probleme, VI. Literaturverzeichnis, Namen- und Sachverzeichnis.

Część I zawiera najważniejsze pojęcia teorii obiektów geometrycznych, a mianowicie: pojęcie przestrzeni arytmetycznej i geometrycznej, układu współrzędnych i jego transformacji, pseudogrupy i grupoidu, obiektu geometrycznego, komitanty, równoważności obiektów geometrycznych itd. Część ta kończy się zasadą, która pozwala wyznaczanie komitant sprowadzić do możliwie najprostszych wśród obiektów równoważnych.

W części drugiej autorowie zajmują się podstawowym problemem teorii obiektów geometrycznych, tzn. klasyfikacją obiektów. Polega ona na wyznaczaniu obiektów określonego typu i badaniu ich równoważności. Jak wiadomo, specjalny obiekt geometryczny jest wyznaczony przez regułę transformacji

$$\overline{\omega}^i = \Phi(\omega; \xi_0^k, \overline{\xi}_0^{\varkappa}, A_k^{\varkappa}, \ldots, A_{k_1\ldots k_s}^{\varkappa})$$

przy zmianie układu współrzędnych; $\omega, \overline{\omega}, A_k^{\varkappa}, \ldots, A_{k_1\ldots k_s}^{\varkappa}$ oznaczają odpowiednio współrzędne obiektu w układzie U, $\overline{U}$ oraz pochodne cząstkowe transformacji, która prowadzi od układu U do $\overline{U}$. Trójkę liczb, z których pierwsza m oznacza liczbę składowych obiektu, druga n — wymiar przestrzeni, a trzecia s — klasę, tzn. najwyższy rząd pochodnej, która występuje w regule transformacji, nazywamy *typem* obiektu geometrycznego. Obiekt nazywa się *nieróżniczkowy* lub *czysto różniczkowy*, jeżeli w regule transformacji nie występują pochodne transformacji układu lub nie występują współrzędne punktu $\xi_0^k, \overline{\xi}_0^{\varkappa}$ w układzie U i $\overline{U}$. Zostały wyznaczone i sklasyfikowane wszystkie obiekty nieróżniczkowe bez żadnych założeń regularności. Ponieważ każdy specjalny obiekt geometryczny otrzymać można z pewnego obiektu nieróżniczkowego i czysto różniczkowego, zostały dalsze rozważania ograniczone tylko do obiektów czysto różniczkowych. I tak przy założeniu ciągłości i pewnym dodatkowym założeniu wyznaczone zostały wszystkie obiekty typu $[1, 1, 1]$, $[1, 1, 2]$, $[1, 1, 3]$, oraz udowodniono, że nie istnieją obiekty klasy $[1, 1, r]$, $r \geqslant 4$. Przy założeniu klasy C^1 i pewnym dodatkowym założeniu wyznaczone zostały wszystkie obiekty typu $[1, n, 1]$. Został następnie udowodniony pewien lemat, który pozwala wyznaczyć wszystkie obiekty o ilości składowych nie mniejszej od ilości parametrów występujących w regule transformacji (niezależnych pochodnych cząstkowych). Stosowanie tego lematu nie wymaga wprawdzie żadnych założeń regularności odnośnie do reguły transformacji, ale nakłada na nią pewien warunek jednoznacznej odwracalności, który w istotny sposób ogranicza ilość otrzymanych w ten sposób obiektów. Za pomocą tego lematu zostały wyznaczone niektóre z obiektów typu $[m, 1, r]$. Część ta jest zakończona rozważaniami dotyczącymi klasyfikacji obiektów quasiliniowych oraz rozważaniami dotyczącymi pewnych własności pseudowielkości.

Część III zawiera wyniki dotyczące algebry obiektów. Niech będzie danych q obiektów $\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega}$; mówimy, że obiekty te dopuszczają algebrę z q-narną operacją Ψ, jeżeli obiekt określony wzorem

$$\Omega = \Psi(\overset{1}{\Omega}, \ldots, \overset{q}{\Omega})$$

jest również obiektem geometrycznym. Zostały wyznaczone wszystkie operacje binarne i wszystkie algebry dla obiektów równoważnych skalarom, biskalarom, gęstościom weylowskim i zwykłym. Operację $\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega})$ nazywamy *uogólnionym dodawaniem*, jeżeli ma ona postać

$$\Psi(\overset{1}{\Omega}, \overset{2}{\Omega}) = F[G(\overset{1}{\Omega}) + H(\overset{2}{\Omega})],$$

gdzie F, G i H są funkcjami odwracalnymi jednej zmiennej. Została rozstrzygnięta kwestia dodawania dla G-obiektów. Algebrę obiektów nazywamy *algebrą w węższym sensie*, jeżeli zarówno obiekty, które podlegają operacji, jak również ich wynik są obiektami o tym samym prawie transformacji. Przy założeniu klasy C^2 i pewnych dodatkowych założeniach zostały wyznaczone zarówno reguły transformacji obiektów, które dopuszczają algebrę w węższym sensie, jak i również odpowiadające im operacje.

Część IV zawiera rozważania dotyczące wyznaczania pochodnej kowariantnej obiektów geometrycznych. Niech będzie dane pole obiektów geometrycznych $\Omega_e(\xi)$ r-tej klasy. W ogólności komitanta różniczkowa s-tej klasy nie jest obiektem geometrycznym. Jeżeli jednak istnieje taki obiekt geometryczny Π_c klasy $r+s$, ażeby komitanta różniczkowa s-tej klasy obiektu Ω_e i Π_c już była obiektem geometrycznym, tej samej klasy co Ω_e, to nazywamy ją *pochodną kowariantną* s-tego rzędu obiektu Ω_e. Zostały wyznaczone pochodne kowariantne pierwszego rzędu gęstości zwykłych i weylowskich oraz obiektów drugiej klasy o jednej składowej bez żadnych założeń regularności. Dalej została wyznaczona pochodna kowariantna pierwszego rzędu obiektu o m składowych klasy 1 i 2, gdy ilość składowych jest nie mniejsza od ilości parametrów. Wszystkie powyższe wyniki dotyczą przestrzeni jednowymiarowej. Wreszcie zostały przedstawione pewne wyniki dotyczące pochodnej kowariantnej wektora, która jest tensorem o walencji 2.

Rozdział V zawiera pewne wyniki teorii obiektów geometrycznych, które z różnych względów nie zostały przedstawione w rozdziałach poprzednich. Rozważania tego rozdziału podzielić można na dwie części. Jedne dotyczą komitant algebraicznych pewnych obiektów geometrycznych (komitanta gęstości, skalarne komitanty wektora, tensorowe komitanty wektora, komitanty typu [1, 2, 1] wektora, skalarne komitanty tensora, skalarne komitanty pary wektorów), drugie zaś komitant różniczkowych (komitanty różniczkowe gęstości, pochodna Lie'go wektora kontra- i kowariantnego i gęstości). Na zakończenie tego rozdziału autorowie podają pewne otwarte problemy teorii obiektów geometrycznych. Problemy te zostały zebrane w działy odpowiadające podstawowym działom tej teorii. Z przeglądu tych problemów wynika, że systematyczne badania w teorii obiektów geometrycznych zostały zaledwie zapoczątkowane i dużo jest jeszcze w tej dziedzinie do zrobienia.

Spis literatury obejmuje wszystkie prace związane z teorią obiektów geometrycznych (nie tylko cytowane w książce), które ukazały się w latach 1936-1960.

Jak już wspomniałem, książka jest interesująca i pożyteczna zarówno dla czytelników znających teorię obiektów geometrycznych, jak również dla tych, którzy jej nie znają. Pierwszym daje systematyczny przegląd wyników pewnego specjalnego typu w tej teorii wraz ze skrupulatnie zebranymi danymi bibliograficznymi. Drugich zapoznaje z najważniejszymi pojęciami i problemami oraz pewnymi sposobami ich rozwiązywania.

Szybki rozwój teorii obiektów geometrycznych szczególnie w ostatnich czasach powoduje, że książki z tego zakresu starzeją się bardzo szybko. Dlatego byłoby rzeczą bardzo dobrą, gdyby autorowie zechcieli się podjąć nowego poprawionego i uzupełnionego wydania tej ważnej pozycji w naszej literaturze matematycznej. Za tym przemawia jeszcze fakt, że wydanie obecne jest już wyczerpane i że jest to jedyna publi-

kacja typu monograficznego z teorii obiektów geometrycznych w Polsce, a jedna z nielicznych na świecie.

Na str. 44, wiersz 17 od góry, zaszła chyba pomyłka przy definicji funkcji $\Lambda(\tau)$. Powinno być $\Lambda(\tau) \overset{df}{=} \Theta(\log\tau)$.

Na str. 166, wiersz 10 od góry, zamiast *Invariante* powinno być *Invarianten*.

Algebra obiektów geometrycznych jest właściwie częścią teorii komitant. Wydaje mi się, że przedstawienie byłoby bardziej przejrzyste, gdyby część od str. 92 potraktować jako teorię komitant, tę zaś podzielić na komitanty algebraiczne i różniczkowe. Algebra obiektów weszłaby w skład komitant algebraicznych.

M. Kucharzewski

C. Chabauty, A. et F. Châtelet, R. Descombes, Ch. Pisot et B. Poitou, *Introduction à la Théorie des Nombres*, Paul Erdös, *Quelques problèmes de la Théorie des Nombres* (Monographies de L'Enseignement mathématique No 6), Genewa 1963, str. 135.

Książka ta składa się z dwóch części: pierwszą z nich stanowi sześć artykułów przeglądowych, napisanych przez różnych autorów i omawiających różne gałęzie teorii liczb, drugą — zbiór 76 problemów, którego autorem jest P. Erdös.

Artykuły stanowiące pierwszą część były uprzednio wygłoszone w maju 1960 r. w Grenoble i opublikowane w tomach 6-8 czasopisma L'Enseignement mathématique; są to (w porządku, w jakim są zamieszczone w omawianej książce):

Wstęp do geometrii liczb (C. Chabauty), *Wstęp do analizy diofantycznej* (F. Châtelet), *Zagadnienia aproksymacji diofantycznych* (R. Descombes), *Wstęp do teorii liczb algebraicznych* (Ch. Pisot), *Twierdzenie Thue'go-Siegela-Rotha* (G. Poitou) oraz *Bibliografia teorii liczb* (A. Châtelet).

Pierwsze pięć artykułów wprowadza czytelnika posiadającego wykształcenie matematyczne, nie będącego jednakże specjalistą w dziedzinie teorii liczb, w świat pojęć i metod królowej matematyki. W artykułach tych jest omówiona klasyczna problematyka przedstawianych działów, a następnie podane są główne wyniki osiągnięte w jej badaniu; artykuł Pisota różni się trochę od pozostałych: stanowi on dosłownie wstęp do teorii liczb algebraicznych z całkowitym prawie pominięciem dowodów przytoczonych faktów.

Artykuł A. Châteleta dzieli teorię liczb na 12 gałęzi i do każdej z nich podaje odsyłacze do bibliografii, obejmującej 46 pozycji książkowych. Autor poświęca mniej niż jedną stronę na omówienie przedmiotu badań każdego działu, a w bibliografii charakteryzuje w kilku wierszach tekstu treść każdej książki. W bibliografii figuruje jedna tylko książka Dicksona — trzytomowa *History of the theory of numbers*, brak natomiast innych jego książek. Brak również nieznanej może na Zachodzie, a wartościowej książki B. Wienkowa (Б. А. Венков), *Элементарная теория чисел*, Moskwa 1937.

Druga część książki to kolejny (po *Some unsolved problems*, Michigan Math. Journ. 4 (1957), str. 291-300, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 6 (1961), str. 221-254, *Problemy ekstremalne w teorii liczb* (węg)., Mat. Lapok 13 (1962), str. 228-255) zbiór problemów, którego autorem jest Erdös. Tym razem podaje on problemy tylko z teorii liczb, w większości mające charakter kombinatoryczny; autor we wstępie mówi nawet o kombinatorycznej teorii liczb. Znaczna część problemów ączy się z licznymi pracami autora.