ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VIII (1965)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

R. JAJTE (Łódź)

O sztywnych podziałach odcinka $\langle 0,1\rangle$

Oznaczmy przez Ω zbiór wszystkich ciągów liczb z przedziału $\langle 0, 1\rangle$. Jeżeli $\xi = \{x_n\} \in \Omega$, to liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wyznaczają pewien podział $P_n(\xi)$ odcinka $\langle 0, 1\rangle$. Oznaczmy średnicę tego podziału przez $\Delta_n(\xi)$. Wykażemy, że

$$\inf_{\xi\in\Omega} \limsup_{n\to\infty} n\Delta_n(\xi) = 1/\log 2. \tag{1}$$

Niech $\xi = \{x_n\} \in \Omega$ i niech

$$\limsup_{n\to\infty} n\Delta_n(\xi) = a < \infty.$$

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Istnieje $n_0(\varepsilon)$ takie, że

$$\Delta_n(\xi) \leqslant \frac{a+\varepsilon}{n} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0(\varepsilon). \tag{2}$$

Oznaczmy przez $m_i^{(n)}$ ilość odcinków $I_k^{(n)}$ podziału $P_n(\xi)$ spełniających nierówności

$$\frac{a+\varepsilon}{n+i+1} < |I_k^{(n)}| \leqslant \frac{a+\varepsilon}{n+i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{3}$$

gdzie $|I|$ oznacza długość odcinka I. Z nierówności (2) i (3) wynika, że gdy $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, wówczas

$$\sum_{i=0}^{\nu} m_i^{(n)} \leqslant \nu + 1 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n);$$

stąd

$$1 = \sum_k |I_k^{(n)}| \leqslant (a+\varepsilon) \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+i}. \tag{4}$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+i} = \log 2,$$

więc przechodząc w nierówności (4) do granicy przy $n \to \infty$, a następnie przy $\varepsilon \to 0$, otrzymamy

$$a \geqslant 1/\log 2.$$

Ze względu na dowolność rozważanego ciągu ξ wynika stąd, że

$$\inf_{\xi \in \Omega} \limsup_{n \to \infty} n \Delta_n(\xi) \geqslant 1/\log 2. \tag{5}$$

Niech teraz będzie $\delta > 0$. Istnieje takie $n_0(\delta)$, że

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \log 2 - \delta \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0(\delta).$$

Istnieją więc liczby $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$ należące do przedziału $\langle 0, 1\rangle$ i dzielące ten przedział na n_0 odcinków $I_k^{(n_0-1)}$ spełniających nierówności

$$|I_k^{(n_0-1)}| \leqslant (\log 2 - \delta)^{-1}/(n_0+k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n_0).$$

Za x_{n_0} przyjmijmy taką liczbę, która dzieli odcinek $I_1^{(n_0-1)}$ na dwa odcinki spełniające nierówności

$$|I'| \leqslant (\log 2 - \delta)^{-1}/(2n_0+1), \quad |I''| \leqslant (\log 2 - \delta)^{-1}/(2n_0+2).$$

Jest to możliwe, ponieważ

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

Otrzymamy w ten sposób podział odcinka $\langle 0, 1\rangle$ na przedziały $I_k^{(n_0)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n_0+1)$ spełniające nierówności

$$|I_k^{(n_0)}| \leqslant (\log 2 - \delta)^{-1}/(n_0+1+k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n_0+1).$$

Za liczbę x_{n_0+1} przyjmijmy taką liczbę, która dzieli odcinek $I_1^{(n_0)}$ na dwa odcinki spełniające nierówności

$$|I^*| \leqslant (\log 2 - \delta)^{-1}/(2n_0+3), \quad |I^{**}| \leqslant (\log 2 - \delta)^{-1}/(2n_0+4),$$

otrzymując w ten sposób podział odcinka $\langle 0, 1\rangle$ na przedziały $I_k^{(n_0+1)}$ spełniające nierówności

$$|I_k^{(n_0+1)}| \leqslant (\log 2 - \delta)^{-1}/(n_0+2+k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n_0+2).$$

Postępując w analogiczny sposób, określamy indukcyjnie liczby x_n dla $n > n_0+1$ tak, by liczby $x_1, \ldots, x_n$ dawały podział odcinka $\langle 0, 1\rangle$ na przedziały $I_k^{(n)}$ spełniające nierówności

$$|I_k^{(n)}| \leqslant (\log 2 - \delta)^{-1}/(n+1+k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Otrzymamy w ten sposób ciąg $\xi = \{x_n\}$, dla którego

$$\limsup_{n\to\infty} n\Delta_n(\xi) \leqslant (\log 2 - \delta)^{-1}.$$

Ze względu na dowolność liczby δ otrzymujemy

$$\inf_{\xi\in\Omega} \limsup_{n\to\infty} n\Delta_n(\xi) \leqslant 1/\log 2,$$

co wraz z nierównością (5) daje (1).