ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VIII (1965)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

G. T. CHAJRULLIN (Tuła, ZSRR)

O liczbach Fibonacciego

Jak wiadomo, *liczbami Fibonacciego* nazywamy wyrazy ciągu $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ Oznaczając n-ty wyraz tego ciągu przez a_n, mamy zależność $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Liczbę a_n można też wyrazić za pomocą n, jak następuje

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad (\textit{wzór Bineta}).$$

Wiadomo, że liczba Fibonacciego może być pierwsza tylko wtedy, gdy numer jej miejsca w ciągu Fibonacciego jest liczbą pierwszą — z wyjątkiem liczby $a_4 = 3$, która jest pierwszą, chociaż jej numer $n = 4$ jest liczbą złożoną.

W niniejszej pracy podamy pewną klasę liczb Fibonacciego złożonych, których numery są liczbami pierwszymi.

TWIERDZENIE. *Jeśli $p > 7$ i $2p-1$ są liczbami pierwszymi oraz liczba p ma postać*

(a) $p = 5k+2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *lub* (b) $p = 5k-1$ $(k = 1, 2, \ldots)$,

to liczba a_p jest złożona.

Dowód. Podnosząc obustronnie do kwadratu równość

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p\right]$$

i mnożąc przez $5 \cdot 2^{2p-1}$, uzyskamy

$$5a_p^2 2^{2p-1} = \tfrac{1}{2}[(1+\sqrt{5})^{2p} + (1-\sqrt{5})^{2p}] + 2^{2p},$$

czyli

$$5a_p^2 2^{2p-1} = 1 + C_{2p}^2 \cdot 5 + C_{2p}^4 \cdot 5^2 + \ldots + C_{2p}^{2p-2} \cdot 5^{p-1} + 5^p + 2^{2p},$$

gdzie C_{2p}^k oznaczają współczynniki newtonowskie występujące w rozkładzie dwumianu $(2 \leqslant k \leqslant 2p-2)$.

Mamy $2^{2p-1} \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 2p-1)$, $C_{2p}^{k} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2p-1)$, a więc

$$(1) \quad 5a_p^2 \cdot 2 \equiv 1 + 5^p + 4 (\mathrm{mod}\, 2p-1), \quad \text{czyli} \quad 2a_p^2 \equiv 5^{p-1} + 1 (\mathrm{mod}\, 2p-1).$$

Na mocy kryterium Eulera, $5^{p-1} \equiv (5/2p-1) (\mathrm{mod}\, 2p-1)$, gdzie $(5/2p-1)$ oznacza symbol Legendre'a.

(a) Niech $p = 5k+2$; wtedy $2p-1 = 10k+3$. Wykorzystując znane własności symbolu Legendre'a uzyskujemy $(5/2p-1) = (5/10k+3) = (3/5) = -1$. Stąd na mocy wzoru (1) otrzymujemy $2a_p^2 \equiv -1+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2p-1)$. Liczba $2a_p^2$ jest zatem podzielna przez liczbę pierwszą $2p-1$, a więc a_p jest podzielna przez $2p-1$. Stąd, wobec łatwej do sprawdzenia nierówności $a_p > 2p-1$, wnosimy, że liczba a_p jest złożona.

Na przykład liczby Fibonacciego o numerach 37, 97, 157 są złożone. Są one podzielne odpowiednio przez 73, 193, 313.

(b) Niech $p = 5k-1$; wtedy $2p-1 = 10k-3$. Zatem $(5/2p-1) = (5/10k-3) = (2/5) = -1$. Rozumując podobnie jak w przypadku (a) uzyskamy drugą część tezy twierdzenia.

Na przykład liczby Fibonacciego o numerach 19, 79, 139, 199 są złożone. Są one podzielne odpowiednio przez 37, 157, 277, 387.

Udowodnione twierdzenie pozwala przy badaniu liczb pierwszych w ciągu Fibonacciego nie rozpatrywać liczb o numerach pierwszych $p = 5k+2$ lub $p = 5k-1$ takich, że $2p-1$ jest liczbą pierwszą.