ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VIII (1965)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

A. Rotkiewicz (Warszawa)

O podzielności liczby a^n+1 przez n

Celem niniejszego artykułu jest dowód elementarny następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Dla każdej liczby naturalnej* $a>1$ *istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych* n, *dla których* $n \mid a^n+1$ (1).

Dowód. Rozróżniamy tu dwa przypadki.

1) *a jest parzyste.* Ponieważ $a+1$ jest wówczas nieparzyste i większe od 2, więc ma dzielnik pierwszy nieparzysty p. Wobec $p \mid a+1$ i nieparzystości p mamy $a+1 \mid a^p+1$, a zatem $p \mid a^p+1$. Wzór $n \mid a^n+1$ ma więc rozwiązanie przy nieparzystym n. Lecz wówczas $a^n+1 = nm$, gdzie m, jako dzielnik liczby nieparzystej, jest liczbą nieparzystą. Stąd $a^n+1 \mid a^{nm}+1 = a^{a^n m}+1$, przy czym, wobec $a^n+1>n$ (gdyż $a>1$), liczba $n_1 = a^n+1$ jest nieparzysta, większa od n oraz $n_1 \mid a^{n_1}+1$. Z każdego rozwiązania wzoru $n \mid a^n+1$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, otrzymujemy więc nowe rozwiązanie, w którym n jest większą liczbą nieparzystą. Twierdzenie nasze jest więc prawdziwe dla a parzystych.

2) *a jest liczbą nieparzystą* >1. Mamy wówczas $2 \mid a^2+1$. Jeżeli zaś przy pewnym parzystym n mamy $n \mid a^n+1$, to, wobec nieparzystości a, liczba a^n+1 jest postaci $8t+2$ i przeto $a^n+1 = nk$, gdzie k jest liczbą nieparzystą. Stąd $a^n+1 \mid a^{nk}+1 = a^{a^n+1}+1$ i dla liczby $n_1 = a^n+1 > n$ mamy $n_1 \mid a^{n_1}+1$, gdzie n_1 jest liczbą parzystą. Wynika stąd, że w razie nieparzystego $a>1$ istnieje nieskończenie wiele liczb parzystych n, dla których $n \mid a^n+1$. Twierdzenie nasze jest więc prawdziwe dla a nieparzystych >1.

Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Zauważmy, że wskazane w naszym dowodzie postępowanie nie daje wszystkich liczb naturalnych n, dla których zachodzi wzór $n \mid a^n+1$.

---

(1) Rozwiązując pewne zagadnienie, postawione przez W. Sierpińskiego, O. Reutter dowiódł, że dla każdej liczby naturalnej a nie będącej postaci $a = 2^k-1$, gdzie $k = 1, 2, \ldots$, istnieje nieskończenie wiele liczb nieparzystych n, dla których $n \mid a^n+1$ (zob. Elem. Math. 18 (1963), str. 89-90). Opierając się na tym twierdzeniu W. Sierpiński dowiódł też naszego twierdzenia (zob. tamże 19(1964), str. 106).

Na przykład dla $a = 2$ postępowanie nasze daje dla n kolejno liczby $3, 9, 513, \ldots$ natomiast mamy też $27 \mid 2^{27}+1$, gdyż $27 \mid 2^9+1 \mid 2^{27}+1$. Dla $a = 7$ postępowanie nasze daje kolejno na n liczby $2, 50, \ldots$, ale mamy też $10 \mid 7^{10}+1$.

Zauważymy tu jeszcze, że nasze twierdzenie wynika też natychmiast ze wspomnianego przez nas w odsyłaczu twierdzenia O. Reuttera. Jeżeli bowiem $a = 2^k - 1$, gdzie k jest liczbą naturalną > 1, to $a^2+1 \equiv 2 \pmod 4$ i, wobec $a > 1$, liczba a^2+1 nie jest potęgą dwójki. W myśl twierdzenia Reuttera istnieje więc nieskończenie wiele liczb nieparzystych n, dla których $n \mid (a^2)^n+1$, skąd, wobec parzystości liczby $(a^2)^n+1$, wynika, że $2n \mid a^{2n}+1$.