ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VIII (1965)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

A. SCHINZEL (Warszawa)

Uwaga do artykułu H. Steinhausa „Pogadanka (trochę historyczna)"

H. Steinhaus w artykule [2] postawił pytanie: czy między dwoma bezpośrednio po sobie następującymi kołami kratowymi leży zawsze koło osobliwe. Przykład kół kratowych o promieniach $\sqrt{8}$ i $\sqrt{9}$ wykazuje, że odpowiedź na to pytanie jest przecząca. Istotnie, oznaczając za przykładem Steinhausa przez $L(x)$ liczbę punktów kratowych objętych kołem $u^2+v^2 = x$ mamy, co łatwo sprawdzić, $L(8) = 25$. Zatem dla x z przedziału $(8, 9)$ jest $L(x) = 25$, z drugiej strony, dla x z tego przedziału $\pi x > 8\pi > 25$. Udowodnimy

TWIERDZENIE. *Istnieje nieskończenie wiele par kolejnych kół kratowych, między którymi nie leży żadne koło osobliwe.*

Dowód. Na mocy twierdzenia Hardy'ego (patrz [1], Satz 542) istnieje ciąg nieskończony liczb rzeczywistych x_k rozbieżny do ∞ i taki, że

$$L(x_k) < \pi x_k - c x_k^{1/4} (\log x_k)^{1/4}, \tag{1}$$

gdzie c jest pewną stałą dodatnią.

Niech a_k będzie najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność $L(a_k) > L(x_k)$, a b_k najmniejszą liczbą naturalną taką, że $L(b_k) > L(a_k)$. Koła $u^2+v^2 = a_k$ i $u^2+v^2 = b_k$ stanowią parę kolejnych kół kratowych. Wykażemy, że dla dostatecznie dużych k między tymi kołami nie leży żadne koło osobliwe. Niech $U(n)$ będzie liczbą rozkładów liczby naturalnej n na sumę dwu kwadratów liczb całkowitych (z uwzględnieniem porządku składników). Dla x z przedziału (a_k, b_k) mamy

$$L(x) = L(a_k) = L(x_k) + U(a_k). \tag{2}$$

Ponieważ $L\big((\sqrt{x_k}+1)^2\big) > L(x_k)$, z definicji a_k wynika, że

$$(\sqrt{x_k}+1)^2 \geqslant a_k. \tag{3}$$

Z drugiej strony, dla odpowiedniej stałej d

$$U(n) < d n^{1/8} \tag{4}$$

(patrz [1] str. 202). Z (1), (3) i (4) otrzymujemy dla dostatecznie dużych k

$$L(x_k)+U(a_k)<\pi x_k-cx_k^{1/4}+d(\sqrt{x_k}+1)^{2/8}<$$
$$<\pi x_k-cx_k^{1/4}+dx_k^{1/8}+d<\pi x_k,$$

zatem, wobec (2), dla x z przedziału (a_k, b_k) mamy $L(x)<\pi a_k$, co kończy dowód twierdzenia.

W związku z artykułem [2] zauważmy jeszcze, że aczkolwiek twierdzenie III tego artykułu jest prawdziwe i, jak stwierdza sam autor, daje się otrzymać z wyników Hardy'ego, to jednak dowód twierdzenia III podany w [2] jest błędny. Błąd tkwi w dowodzie twierdzenia II stanowiącego pomost między twierdzeniami I i III.

W dowodzie twierdzenia II czytamy: „dla $x=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(4s+1)$ jest $L(x)>x\pi$, dla $x=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(4s+3)+\frac{1}{3}$ jest $L(x)<x\pi$; s jest dowolną liczbą naturalną". Podstawmy $s=1$. Mamy, jak łatwo sprawdzić

$$L(15)=45<15\pi, \qquad L(105\tfrac{1}{3})=333>(105\tfrac{1}{3})\pi.$$

Pochodzenie błędu jest następujące. We wzorze wyraźnym dla $L(n)$,

$$L(n)=1+4\left\{E\frac{n}{1}-E\frac{n}{3}+E\frac{n}{5}\ldots\pm\ldots\right\}$$

(patrz [2], wzór (2)) po podstawieniu za n liczby $1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2m+1)$ nie otrzymamy wzoru

$$L(n)=1+4n\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\pm\frac{1}{n}\right\}$$

(patrz [2], wzór (3)), gdyż nie wszystkie liczby $\frac{n}{k}$ $(k\leqslant n)$ są całkowite.

Co do twierdzenia II, to jego prawdziwość dla dostatecznie dużych s wynika z twierdzenia 537, [1], dotyczącego częstości zmian znaku funkcji $L(x)-\pi x$.

Prace cytowane

[1] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. II, New York 1947.

[2] H. Steinhaus, *Pogadanka (trochę historyczna)*, Wiadom. Mat. 7(1963), str. 21-26.