ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VIII (1965)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

S. HARTMAN (Wrocław)

Osiągnięcia naukowe XX-lecia w zakresie matematyki*

I

Przed wojną było w Polsce około 100 twórczo pracujących matematyków. Przeszło połowa postradała życie w czasie wojny — z nich prawie wszyscy zamordowani przez niemieckie władze okupacyjne. Na domiar tej klęski bezpośrednio po wojnie zmarł koryfeusz matematyki polskiej Stefan Banach oraz matematyk warszawski, uczony bujnego talentu, Stefan Mazurkiewicz. Obecnie w Polsce pracuje twórczo około 500 matematyków, którzy łącznie publikują przeciętnie około 400 prac rocznie. Znakomita większość tych prac ogłaszana jest w polskich czasopismach matematycznych, których jest 9 (przed wojną 5). Tak przedstawia się w skąpych danych liczbowych pogrom i odrodzenie się matematyki polskiej.

Wiadomo powszechnie, że katastrofa wojenna poczyniła spustoszenia w całym polskim życiu kulturalnym i że późniejszy jego rozwój doprowadził do przekroczenia poziomu przedwojennego. Nazwiska polskich twórców pojawiają się często na forum światowym w takich dziedzinach, w których dawniej prawie nie były znane. Oprócz ogólnych przyczyn tego zjawiska, jak przyspieszenie tempa zmian i ewolucji na całym świecie, jak emancypacja upośledzonych warstw społecznych w Polsce, istnieją jeszcze dla każdej dziedziny nauki i kultury specjalne przyczyny rozwoju i specjalne warunki, od których on zależy. Wyjaśnienie tych przyczyn i warunków w odniesieniu do matematyki jest jednym z zadań tego referatu.

Matematyka nie należy do dziedzin zawojowanych przez naukę polską dopiero niedawno. Wprost przeciwnie, w okresie międzywojennym matematyka polska chlubnie zasłynęła. Trzeba sobie zdać sprawę z tego, czy ilościowy jej wzrost zilustrowany przed chwilą kilkoma liczbami, idzie w parze ze wzrostem jej znaczenia i wpływów. Na to pytanie trudno odpowiedzieć od razu i jednoznacznie.

---

* Referat opracowany dla Komitetu Matematycznego PAN na podstawie materiałów dostarczonych przez E. Marczewskiego, J. Oderfelda, T. Ważewskiego i innych.

Polska szkoła matematyczna przed wojną dawała się dobrze określić: to była w Warszawie teoria mnogości, topologia i funkcje rzeczywiste z Sierpińskim i Kuratowskim na czele i logika matematyczna z Łukasiewiczem i Tarskim oraz we Lwowie analiza funkcjonalna z Banachem na czele. Młode działy „warszawskie", zaliczane dzisiaj do tzw. podstawowych działów matematyki, były świadomie rozwijane z inicjatywy Zygmunta Janiszewskiego, gdyż dawały więcej szans startującemu środowisku niż działy klasyczne, w których byliśmy znacznie wyprzedzeni przez ośrodki zachodnie. Zupełnie nowy dział, analiza funkcjonalna, był w znacznym stopniu stworzony przez Banacha; jego dzieło, kontynuowane przez uczniów i współpracowników, stało się kamieniem milowym w historii matematyki, co już dziś śmiało można stwierdzić. Poza tym w Polsce przedwojennej uprawiane były i inne dyscypliny matematyczne, ale tylko przez oddzielnych uczonych (np. przez S. Zarembę, A. Zygmunda, M. Biernackiego). A więc, reasumując, bardzo wysoki poziom i doniosłe odkrycia w kilku wąskich zakresach.

Powojenna matematyka polska nie mogła zachować tego oblicza. Gdyby utrzymać taką jednostronność, matematyka w Polsce nie mogłaby ani służyć technice i gospodarce krajowej, ani nadążać za matematyką światową, w której po wojnie nie tylko pojawiły się nowe specjalności, ale także wielkie syntezy. Wzajemne przenikanie się teorii i metod wymaga stałej współpracy matematyków o różnorodnych specjalnościach, a także stwarza zapotrzebowanie na uczonych o wszechstronnej wiedzy i szerokich horyzontach. Dlatego ci matematycy polscy, którzy zostali przy życiu po wojnie, a przede wszystkim kierownicy odpowiedzialni za organizację badań, nie mieli wątpliwości, że działy tzw. klasyczne, jak teoria równań różniczkowych lub funkcji analitycznych, zbyt słabo rozwinięte przed wojną, muszą znaleźć należne sobie miejsce. Ponadto trzeba było rozpocząć pracę nad bezpośrednimi zastosowaniami matematyki do zagadnień technicznych, gospodarczych i przyrodniczych. Dawniej bardzo mało pracowano w tej dziedzinie; bezpośrednio po wojnie wielką inicjatywę w tym kierunku rozwinął H. Steinhaus. Rachunek prawdopodobieństwa reprezentowany był przed wojną przez kilku wybitnych analityków, jak A. Zygmund, J. Marcinkiewicz, H. Steinhaus i A. Rajchman, a jego dyscyplina pochodna — statystyka matematyczna — głównie przez J. Spławę-Neymana. Te działy, szczególnie bliskie praktycznym zastosowaniom, trzeba było po wojnie nie tylko utrzymać, ale i rozwinąć przyciągając do nich liczniejszych matematyków. W zakresie dalszym od zastosowań na debet zapisać należało algebrę, gdyż jej rola w matematyce współczesnej wzrosła bardzo, a w Polsce przed wojną nie uprawiano jej prawie wcale. Te wszystkie zamierzenia realizować trzeba było nie zaniedbując tradycyjnych „polskich działów", jak topologia czy też analiza funkcjonalna. Takie zadania stanęły od razu

przed matematyką polską, okrutnie zdewastowaną biologicznie i materialnie, pozbawioną wydawnictw i bibliotek.

Już pierwsze miesiące po wyzwoleniu kraju napawały optymizmem, gdyż twórcza praca matematyczna zaczęła się od razu, zarówno w starych uniwersytetach, jak i w nowo kreowanych w Lublinie, Łodzi, Wrocławiu i Toruniu oraz w oddziałach Polskiego Towarzystwa Matematycznego, dawnych i nowych, zwłaszcza we Wrocławiu. Naukowe życie matematyczne koncentrowało się wtedy, jak i przed wojną, w Polskim Towawarzystwie Matematycznym. Ta organizacja społeczna, mimo silnych tradycji i wielkich zasług dla nauki, nie mogła całkowicie przejąć nowych rozległych zadań, które należało centralnie planować i systematycznie rozwiązywać. Dlatego Polskie Towarzystwo Matematyczne zwróciło się do władz o powołanie do życia Państwowego Instytutu Matematycznego, jako głównej instytucji planującej, koordynującej i wykonującej badania naukowe. Pozytywna decyzja zapadła w r. 1948. W skład instytutu, przekształconego później w Instytut Matematyczny PAN, weszła większość matematyków polskich, czynnych wówczas naukowo, a dyrekcję objął główny jego inicjator i organizator, Kazimierz Kuratowski. Od tej pory osiągnięcia i rozwój matematyki polskiej dają się w przeważającej części odczytać z prac, które wyszły z Instytutu Matematycznego lub były wykonywane pod jego egidą.

Sama idea stworzenia instytutu była znacznie starsza, pojawia się już u Janiszewskiego i wraca w uchwałach przedwojennego Komitetu Matematycznego Rady Nauk Ścisłych i Stosowanych, nie została jednak nigdy przedtem zrealizowana. Instytut został podzielony na grupy badawcze, nazwane później działami. Do jednego działu wchodzą matematycy pracujący we wspólnej specjalności. Stała współpraca badaczy i ich regularne zebrania robocze są istotnym elementem działalności twórczej Instytutu i wywodzą się z tradycji matematyki polskiej. Bardzo wiele prac ma więcej niż jednego autora, a wiele prac pojedynczych autorów nie powstałoby nigdy, gdyby nie rozmowy, wspólne seminaria, różne sugestie kolegów, trudne nieraz do wyodrębnienia w tekście pracy, słowem gdyby nie duch i nastrój określany mianem atmosfery naukowej. Niektóre działy Instytutu mają zwartą tematykę, inne bardzo rozległą i zróżnicowaną, ale każdy dział jest zespolony wspólnymi zainteresowaniami, głębokim porozumieniem naukowym i osobą kierownika. Liczba stałych seminariów prowadzonych przez wszystkie działy Instytutu razem w całym kraju wynosiła np. w r. 1962 ponad 30.

Mimo swego centralnego znaczenia, Instytut Matematyczny PAN nie skupia całej twórczej pracy matematycznej, i to zwłaszcza od r. 1962, gdy ponad 40 pracowników opuściło Instytut. Ważne ośrodki matematycznej pracy badawczej czynne są również na uczelniach. Na wszystkich 7 państwowych uniwersytetach istnieje matematyka jako oddzielny

kierunek studiów. Obok największych ośrodków uniwersyteckich (w Warszawie, Wrocławiu i Krakowie) są mniejsze, ale nawet te, które są słabe liczebnie, nie są słabe naukowo. W ośrodkach nielicznych (jak Lublin, Toruń, Łódź) mniejszy jest wachlarz uprawianych dyscyplin, ale każde środowisko uniwersyteckie ma swoją specjalność, w której jest wybitne (analiza funkcjonalna w Poznaniu, funkcje analityczne w Łodzi i Lublinie, algebra w Toruniu). Ośrodki matematyczne na politechnikach, a jeszcze bardziej w wyższych szkołach ekonomicznych i rolniczych na ogół cierpią na niedobór pracowników naukowych, co nawet stało się przedmiotem szczególnej uwagi na XI Plenum KC PZPR. Obecnie czynione są wysiłki, żeby je wzmocnić. Mimo szczupłości kadry i na tych uczelniach notuje się interesujące wyniki naukowe.

Polskie Towarzystwo Matematyczne nie spełnia już dzisiaj roli jedynej instytucji grupującej badaczy. Posiedzenia naukowe oddziałów Towarzystwa nie skupiają, jak niegdyś, wszystkich matematyków danego środowiska. Duża liczba specjalnych seminariów i konwersatoriów badawczych tłumaczy to dostatecznie. Jednak rola naukowa tego Towarzystwa jest nadal poważna: tam jest miejsce na przegląd wyników i na dyskusję wśród matematyków różnych specjalności. Bez takich dyskusji grozi specjalistom zacieśnienie i utrata perspektyw. Poza tym Towarzystwo Matematyczne jest organem opiniodawczym w wielu sprawach, jak np. nauczanie matematyki w szkołach średnich i wyższych, a także wydaje dwa czasopisma naukowe w języku polskim i w językach obcych.

II

Na jedno z czołowych miejsc w polskiej twórczości matematycznej wysuwa się szkoła *podstaw matematyki*, która w Polsce ma piękną tradycję. Od Jana Łukasiewicza historia tej szkoły biegnie przez A. Tarskiego, A. Mostowskiego, H. Rasiową, J. Łosia do młodych, dziś żywo pracujących badaczy (na przykład A. Ehrenfeucht, A. Grzegorczyk). Oprócz matematyków poświęcających się przede wszystkim logice, również inni, jak S. Mazur, R. Sikorski i C. Ryll-Nardzewski mają poważne wyniki w tej dziedzinie. Spośród licznych odkryć wymienimy płodne i ciekawe pojęcie kategoryczności systemów w danej mocy, co oznacza, że wszystkie modele systemu, które mają tę właśnie moc, są izomorficzne. Pojęcie to wprowadził Łoś i w tym samym czasie niezależnie Amerykanin Vaught. Rasiowa, Sikorski i Mostowski zastosowali metodę modeli algebro-topologicznych do logiki intuicjonistycznej i do innych systemów logicznych, kontynuując w ten sposób badania, których idea wywodzi się od Boole'a. Uzyskali tą metodą dowody twierdzeń o zupełności. Na gruncie przełomowych odkryć Gödla udowodnił Ryll-Nardzewski, że aksjo-

mat indukcji w arytmetyce elementarnej nie da się zastąpić skończonym układem aksjomatów. Oprócz tych badań należących do teorii modeli, zajmowano się z dużym sukcesem tak zwaną analizą obliczalną i funkcjami rekurencyjnymi (Mazur, Mostowski, Grzegorczyk). Początki tych prac przypadają jeszcze na okres przedwojenny (Banach, Mazur), a ich idea polega na zbadaniu, jak wiele z matematyki klasycznej można uzyskać operując jedynie takimi funkcjami, dla których istnieją wyraźne algorytmy obliczania wartości. Podstawowe pojęcia logiczne oraz logiki wielowartościowe były przedmiotem owocnych badań J. Słupeckiego, L. Borkowskiego i A. Mostowskiego.

A. Ehrenfeucht, A. Grzegorczyk, S. Jaśkowski, A. Mostowski i W. Szmielew pracowali nad teorią rozstrzygalności uzyskując dowody rozstrzygalności lub nierozstrzygalności dla różnych teorii zaksjomatyzowanych, na przykład dla algebry Boole'a lub grup abelowych. Podstawami geometrii zajmowali się K. Borsuk, L. Dubikajtis i W. Szmielew. Niedawno J. Mycielski i H. Steinhaus wprowadzili do teorii mnogości interesujący aksjomat, z którego wynika zarówno pewnik wyboru dla rodzin przeliczalnych, jak i mierzalność wszystkich zbiorów na prostej. Dotychczas nie wiadomo, czy aksjomat ten jest niesprzeczny. Polskie badania w dziedzinie podstaw matematyki noszą znamię nowoczesności i stanowią istotny czynnik w rozwoju tej dyscypliny na całym świecie. Odkrycia ostatniej daty dotyczące podstaw teorii mnogości (P. J. Cohen) pozwalają przypuszczać, że badania logiczne i metamatematyczne będą w coraz większym stopniu wpływały na całą matematykę i coraz bardziej interesować będą także niespecjalistów, co zresztą obserwuje się już od czasu odkryć Gödla.

Algebra nowoczesna jest dyscypliną stojącą najbliżej podstaw. Wielu logików jest jednocześnie algebraikami. Jednak badania algebraiczne w Polsce przed wojną były zaniedbane, choć logiczne były wysoko rozwinięte. W miarę powstawania nowych syntetycznych teorii rola algebry w matematyce wzrastała i dziś jest znacznie większa niż trzydzieści lat temu. Toteż wkrótce po wojnie dało się odczuć „społeczne zapotrzebowanie" na algebrę wśród matematyków polskich, głównie młodej generacji. J. Łosiowi udało się nie tylko uzyskać cenne wyniki w teorii grup, ale także wychować uczniów, głównie w Toruniu, którzy pracowali dalej w tej dziedzinie, a potem także w innych działach algebry. Zajmowano się algebrą również w Warszawie i we Wrocławiu. Jeszcze dziesięć lat temu dorobek polskiej algebry był bardzo szczupły, obecnie zaś można tu zanotować wiele wyników znanych i cytowanych na świecie, jak na przykład twierdzenia o algebraicznej strukturze sumy prostej zupełnej grup cyklicznych nieskończonych (Łoś, Ehrenfeucht), charakteryzacja algebraiczna grup abelowych zwartych (A. Hulanicki), twierdzenia o podgrupach wolnych grup topologicznych (S. Balcerzyk, J. Mycielski), roz-

wiązanie niektórych trudnych problemów Kaplansky'ego z teorii grup abelowych (E. Sąsiada) i inne.

Cykl prac o algebrach Boole'a i monografię tego przedmiotu napisał Sikorski. Powszechnie znane jest jego twierdzenie o reprezentacji σ-algebr Boole'a, udowodnione także niezależnie przez Loomisa. Badania algebraików polskich są częściowo przeniknięte metodami topologicznymi, co się wydaje naturalne wobec istnienia atmosfery topologicznej w wielu ośrodkach. We Wrocławiu zajmowano się specjalnie teorią grup topologicznych jednoczącą w sobie problemy algebry i topologii (S. Hartman, A. Hulanicki, J. Mycielski, C. Ryll-Nardzewski). W ostatnich latach rozwinęły się badania w zakresie ogólnych systemów algebraicznych, wyrosłe z abstrakcyjnego pojęcia niezależności, które wprowadził E. Marczewski. Prace jego samego oraz współpracowników (A. Goetz, C. Ryll-Nardzewski, S. Świerczkowski) dotyczyły głównie baz i układów generatorów w algebrach ogólnych. Głębokie twierdzenia o reprezentacji niektórych typów algebr uzyskał K. Urbanik.

Szkoła *mnogościowo-topologiczna* w Warszawie była po wojnie zdekompletowana, bo nie żył już Stefan Mazurkiewicz, który poświęcił topologii ważne prace, odszedł od topologii Wacław Sierpiński, zwróciwszy się ku innym działom matematyki, a Bronisław Knaster objął katedrę we Wrocławiu. Młodsi topologowie przeważnie wyemigrowali lub zginęli w czasie wojny. Pozostali w Warszawie Kazimierz Kuratowski i Karol Borsuk i im przypadło w udziale założenie nowej szkoły, która szybko zaczęła się rozwijać. Nieco później powstała szkoła we Wrocławiu pod kierownictwem Knastera. W ten sposób powojenne osiągnięcia topologii należy śledzić równolegle w tych dwóch ośrodkach. Poza nimi badania w tej dziedzinie były mało uprawiane.

Podstawowe osiągnięcia w topologii ogólnej, dziś zwanej raczej mnogościową, były w dużym stopniu dziełem matematyków polskich i zostały przedstawione w dwutomowej monografii Kuratowskiego, której drugi tom wyszedł z druku już po wojnie. W pierwszych latach powojennych ukazał się cykl prac Kuratowskiego o homotopijnej teorii funkcji ciągłych zmiennej zespolonej. Wyniki zawierały wiele interesujących analogii z klasyczną teorią funkcji analitycznych. Twierdzenia o rozcinaniu przestrzeni euklidesowych bez metod homologicznych uzyskali Borsuk, Kuratowski i Granas, opierając się na własnościach tzw. grupy kohomotopii, wprowadzonej przez Borsuka. J. Jaworowski znalazł ciekawe uogólnienie tego pojęcia i jego związki z innymi pojęciami topologii algebraicznej.

Kompaktyfikacjami i różnymi uogólnieniami zwartości, które odgrywają ostatnio dużą rolę nie tylko w topologii, lecz także we współczesnej analizie, zajmowali się S. Mrówka i R. Engelking. Ich badania wiążą się z teorią tzw. przestrzeni Hewitta rozwiniętą w Stanach Zjedno-

czonych. Niezmienniczość zwartości względem produktowania kartezjańskiego nasuwała liczne problemy co do zachowania się innych własności topologicznych z tego punktu widzenia. Dotyczyły tych problemów prace E. Marczewskiego, R. Sikorskiego i innych. Wynikami zainteresowała się moskiewska szkoła topologii ogólnej P. S. Aleksandrowa, co doprowadziło do powstania teorii tzw. przestrzeni i bikompaktów diadycznych, żywo się obecnie rozwijającej, zwłaszcza w ZSRR.

Bardziej geometryczny charakter miały badania Borsuka i jego uczniów w zakresie teorii wielościanów. Udało się A. Kosińskiemu znaleźć topologiczną charakteryzację wielościanów i rozmaitości dwuwymiarowych. W bliskim związku z teorią wielościanów stoi stworzona przez Borsuka teoria retraktów, której dotyczyło wiele prac (Borsuk, Lelek, Jaworowski, Sieklucki). Pewne wyniki z teorii funkcji zmiennej rzeczywistej posłużyły do udowodnienia twierdzeń w rodzaju twierdzenia Borsuka-Ulama o antypodach (Jaworowski i inni).

We Wrocławiu zajmowano się m. in. topologią tzw. zbiorów dwuspójnych (B. Knaster, R. Duda), teorią wymiaru i teorią krzywych (B. Knaster, K. Urbanik, A. Lelek i in.). Metryczną charakteryzację kostki euklidesowej uzyskał W. Nitka. Odwzorowania o krotności skończonej badali Knaster, Lelek i Mioduszewski kontynuując równocześnie z topologami radzieckimi badania topologów amerykańskich. Interesujące pojęcia σ-spójności wprowadził Mycielski. Ostatnio J. Mioduszewski uzyskał uniwersalny model dla tak zwanych kontinuów łańcuchowych za pomocą pomysłowej konstrukcji opartej na metodach funkcji rzeczywistych. Podobnymi kwestiami zajmowali się znani topologowie amerykańscy Bing, Moise i inni.

Badania czysto *geometryczne* były dawniej w Polsce o wiele mniej rozwinięte niż topologia. Geometria różniczkowa była po wojnie przedmiotem badań głównie w dwóch ośrodkach: krakowskim i wrocławskim.

Prace badawcze zespołu krakowskiego pod kierownictwem S. Gołąba miały za przedmiot dwie dziedziny. Jedną z nich była teoria obiektów geometrycznych, która rozwinęła się po drugiej wojnie światowej i uprawiana jest współcześnie głównie w ZSRR i w Holandii. Z teorią obiektów geometrycznych wiążą się ściśle zagadnienia dotyczące pewnych równań funkcyjnych. Zarówno w teorii obiektów geometrycznych, jak i w teorii równań funkcyjnych zespół krakowski uzyskał wiele interesujących wyników (S. Gołąb, M. Kucharzewski, M. Kuczma, H. Pidek-Łopuszańska i in.). Z matematykami krakowskimi współpracowali w tym zakresie niektórzy matematycy węgierscy, a przede wszystkim A. Aczél (Monografia wspólna z S. Gołąbem o równaniach funkcyjnych w teorii obiektów geometrycznych). Badania zespołu krakowskiego szły równocześnie w kierunku klasycznej geometrii różniczkowej w przestrzeni ekulidesowej. Twierdzenia z tej dziedziny są formułowane zwykle przy zało-

żeniach dość silnej regularności. Otóż zespół krakowski starał się uwolnić je od tych założeń tak, by miały sens i były prawdziwe nawet w punktach osobliwych krzywej lub powierzchni. Stworzono w tym celu odpowiednik pojęcia kierunków asymptotycznych i asymptot, trójścianów Fréneta w punkcie infleksji, funkcji jednorodnych i indykatrysy Carathéodory'ego itd., uogólniono równanie Eulera, pojęcie gradientu itp. I w tym kierunku pracownicy zespołu (S. Gołąb, A. Zajtz, M. Kucharzewski, C. Olech i inni) uzyskali wiele cennych wyników. Za granicą w USA zagadnieniami takimi zajmowali się przede wszystkim A. Wintner i P. Hartman.

Przedmiotem pracy badawczej zespołu wrocławskiego pod kierunkiem Władysława Ślebodzińskiego były głównie zagadnienia teorii koneksji, badane przy zastosowaniu metod i pojęć teorii form zewnętrznych i teorii przestrzeni włóknistych. Dwutomową oryginalną monografię o formach zewnętrznych ogłosił W. Ślebodziński. Różne wyniki w teorii koneksji otrzymał także A. Goetz (koneksje indukowane) i inni. Należą tu też rezultaty z tak zwanej geometrii tekstylnej (Ślebodziński). Prócz tego zajmowano się zagadnieniami niezmienniczości metryki i miary niezmienniczej w grupach topologicznych i w grupach Liego. Goetz znalazł warunki konieczne i dostateczne istnienia metryki niezmienniczej w przestrzeniach jednorodnych indukowanych przez grupy topologiczne, otrzymał też interesujące twierdzenie o metryzacji grupy izometrii w przestrzeni jednorodnej oraz o miarach w przestrzeniach włóknistych.

Badania w dziedzinie *analizy* można sklasyfikować odpowiednio do zakresów, na które się dzieli ta ogromna gałąź matematyki. Ze wszystkich ośrodków polskich tylko Kraków miał poważniejsze tradycje matematyki klasycznej, wywodzące się od Stanisława Zaremby. Po wojnie powstały tam dwie szkoły analizy: szkoła równań różniczkowych pod kierunkiem Tadeusza Ważewskiego oraz funkcji analitycznych pod kierunkiem Franciszka Leji. Ośrodkiem funkcji analitycznych stał się także uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej (M. Biernacki, a po jego śmierci uczniowie) oraz uniwersytet łódzki (Z. Charzyński i współpracownicy). Przez pewien czas funkcje analityczne uprawiane były także we Wrocławiu w bliskiej współpracy z zespołem łódzkim, ale ta działalność skończyła się ze śmiercią dwóch badaczy: W. Wolibnera i jego ucznia J. Zamorskiego. Równaniami różniczkowymi zajmowano się poza Krakowem w Lublinie (A. Bielecki) i nieco w innych ośrodkach. W Warszawie rozwinęła się pod kierunkiem nieżyjącego już W. Pogorzelskiego szkoła równań całkowych. Rachunek wariacyjny uprawiano we Wrocławiu w związku z teorią gier i pościgu (A. Zięba). Osobną domenę badań stanowiła nowoczesna analiza: dystrybucje (J. Mikusiński, S. Łojasiewicz, R. Sikorski) i operatory (Mikusiński). Trudno w ramach tego referatu

scharakteryzować ważniejsze osiągnięcia we wszystkich tych dyscyplinach.

Badania krakowskiej szkoły *równań różniczkowych* pod kierunkiem T. Ważewskiego, które początkowo nawiązały do przedwojennych prac kierownika, objęły stopniowo bardzo szeroki zakres zagadnień. Skonstruowana przez Ważewskiego tzw. metoda retraktowa, uogólniona w różnych kierunkach (A. Pliś, A. Bielecki, C. Kluczny) okazała się skutecznym narzędziem w wielu zagadnieniach dotyczących asymptotycznego przebiegu całek (Z. Mikołajska, Z. Szmydt, K. Tatarkiewicz, C. Olech, W. Mlak, Z. Kowalski oraz wielu autorów zagranicznych). Do zagadnienia jednoznaczności rozwiązań równań zwyczajnych odnosi się rezultat Bieleckiego, który znalazł pewne warunki konieczne i dostateczne jednoznaczności. C. Olech dowiódł, że można wyeliminować ciągłość z warunków jedyności typu Nagumy. Doniosłe osiągnięcia uzyskano z teorii stabilności i globalnej struktury rozwiązań (Z. Butlewski, Z. Opial, C. Olech). W związku ze stabilnością wprowadzono i zastosowano niezmiennicze pojęcie koincydencji asymptotycznej rozwiązań (T. Ważewski, S. Łojasiewicz, C. Olech). A. Lasota podał w terminach analizy funkcjonalnej metodę pozwalającą wnioskować o istnieniu rozwiązań obszernej klasy problemów nieliniowych (równania zwyczajne i cząstkowe) na podstawie jedyności rozwiązań odpowiednich problemów liniowych. Wśród wielu wyników w teorii rozwiązań periodycznych, prawie periodycznych, oscylujących i drgań nieliniowych (Biernacki, Opial, a także Lasota, Olech, Ważewski) niektóre okazały się definitywne. W zakresie teorii sterowania stanowiącej jeden z centralnych problemów nowoczesnej techniki liczne wyniki uzyskali A. Pliś, A. Turowicz i T. Ważewski nawiązując do wykrytego przez Ważewskiego związku tej teorii z równaniami kontyngensowymi ujętymi w nowy sposób. W zakresie badań nad podstawami fizyki S. Łojasiewicz za pomocą nowoczesnego aparatu matematycznego precyzyjnie wyprowadził zasadę prac wirtualnych ujętą przezeń jako zasada asymptotyczna oraz podał teorię paradoksalnego wahadła Kapicy. Dla równań cząstkowych rzędu pierwszego A. Pliś rozstrzygnął postawiony kilkadziesiąt lat temu problem generacji rozwiązań klasy C^1 przez paski charakterystyczne. Przez wprowadzenie pojęcia pasków charakterystycznych rzędu drugiego Pliś uzyskał dokładne wyznaczenie obszaru regularności tego równania. Dla równania struny drgającej Z. Szmydt sformułowała nowy problem graniczny obejmujący jako przypadki szczególne odległe od siebie problemy klasyczne. Wyniki w tym kierunku uzyskali również A. Bielecki, A. Lasota i J. Kisyński — J. Szarski wykrył i uzupełnił istotną lukę w jednej z podstawowych prac Schaudera z zakresu równań hiperbolicznych. A. Krzywicki i J. Szarski we współpracy z N. Aronszajnem (USA) podali silne twierdzenie o jednoznacznej przedłużalności rozwiązań pewnych równań elip-

tycznych na rozmaitościach Riemanna. Pliś skonstruował nieoczekiwany przykład równania eliptycznego o wysokiej regularności, dla którego normalny problem Cauchy'ego nie jest jednoznacznie rozwiązalny. B. Bojarski uzyskał głębokie wyniki z zakresu równań eliptycznych przy bardzo słabych założeniach o prawych stronach. W szkole W. Pogorzelskiego uzyskano wiele twierdzeń o istnieniu rozwiązań problemów nieliniowych dla równań eliptycznych, parabolicznych i równań hydrodynamiki (W. Pogorzelski, H. Grużewska, A. Piskorek, J. Wolska-Bochenek i inni). Wiele prac poświęcono teorii rozwiązań podstawowych dla równań eliptycznych i parabolicznych (szkoła Pogorzelskiego oraz M. Krzyżański i A. Szybiak). Uzyskano zastosowania stochastyczne równań parabolicznych (M. Krzyżański, H. Grużewska). Własnościami linii węzłów drgającej membrany zajmował się F. Barański. Rozwój ważnej dziedziny nierówności różniczkowych jest w wysokim stopniu dziełem matematyków polskich (Szarski, Ważewski, Pliś, Mlak, Opial, Olech, Besala i wielu innych). Pierwsza w literaturze światowej monografia J. Szarskiego poświęcona nierównościom różniczkowym i ich zastosowaniom jest w druku.

Z teorią równań różniczkowych ściśle jest związana teoria równań całkowych, nad którą pracował Pogorzelski wraz z uczniami uzyskując rezultaty w zakresie równań całkowych osobliwych oraz w zakresie równań eliptycznych i parabolicznych. Niektóre z nich mają zastosowanie do hydrodynamiki. Hydrodynamiką zajmowali się poza tym W. Wolibner i A. Krzywicki i otrzymali między innymi interesujące wyniki dotyczące ruchu w ośrodku ciekłym, lepkim, nieściśliwym.

W krakowskiej szkole *funkcji analitycznych* pracowano przeważnie metodą punktów ekstremalnych stworzoną przez Leję. Metoda ta pozwoliła uzyskać liczne wyniki z teorii funkcji analitycznych i harmonicznych, zwłaszcza w obrębie problematyki dotyczącej odwzorowań konformicznych, interpolacji i aproksymacji oraz ogólnej teorii potencjału (Leja, Bach, Górski, Kleiner, Siciak, Szafirski, Szybiak). Samą metodę rozwinięto i zastosowano do funkcji analitycznych wielu zmiennych, którymi matematycy krakowscy (zwłaszcza J. Siciak) zajmują się energicznie od lat kilku. Jest to teoria nowa i żywo się obecnie rozwija w świecie. Badania krakowskie mimo niedawnej daty ich rozpoczęcia są już poważnie zaawansowane. Ośrodki funkcji analitycznych w Lublinie i w Łodzi zajmowały się przeważnie tak zwanymi zagadnieniami ekstremalnymi dla funkcji różnowartościowych, na przykład klasycznym problemem Bieberbacha i jego analogonami. Nowe metody i oszacowania odkryli Z. Charzyński i W. Janowski. Również i te problemy interesują dziś znanych specjalistów nie tylko w Polsce. Tematyka badań w Lublinie (A. Bielecki, J. Krzyż, Z. Lewandowski) była zbliżona, choć metody odmienne. W Lublinie pracowano także nad funkcjami nieróżnowartościo-

wymi, tak zwanymi p-listnymi — ciekawe uogólnienie tego pojęcia wprowadził Biernacki. Biernacki uzyskał także mocne rezultaty z geometrii zer wielomianów.

Szeregami trygonometrycznymi zajmowało się kilku matematyków. Z. Zahorski osiągnął między innymi bardzo mocny wynik budując przykład szeregu, który różni się tylko porządkiem wyrazów od szeregu Fouriera funkcji całkowalnej wraz z kwadratem, a jest rozbieżny na zbiorze miary dodatniej. Podobny przykład anonsował wielki matematyk radziecki Kołmogorow, ale go nie ogłosił. Przykład Zahorskiego i metoda jego konstrukcji wywołały duże zainteresowanie specjalistów. J. Meder uzyskał ciekawe twierdzenie o sumowalności szeregów Fouriera różnymi metodami. S. Hartman badał ciągi współczynników Fouriera i Fouriera-Stieltjesa funkcji różnych klas.

Teoria dystrybucji stworzona w zasadzie w czterdziestych latach przez L. Schwartza i F. L. Sobolewa, a wynikła głównie z potrzeb fizyki, wycisnęła mocne piętno na całej współczesnej analizie. W Polsce zajmowano się nią systematycznie. Mikusiński i Sikorski, autorzy monografii tego przedmiotu, podali nową, prostszą definicję dystrybucji, a Łojasiewicz wprowadził użyteczne pojęcie wartości dystrybucji w punkcie, które zainteresowało wszystkich specjalistów oraz uzyskał głębokie twierdzenia o dzieleniu dystrybucji przez funkcję. Pojęcie dystrybucji jest uogólnieniem pojęcia funkcji; innym jego uogólnieniem jest pojęcie operatora w postaci wprowadzonej przez Mikusińskiego. Operatory od dawna były używane do praktycznego rozwiązywania równań różniczkowych (Heaviside), ale było to tylko uproszczenie techniczne. Przez odpowiednie i celowe zdefiniowanie operatora i wykorzystanie głębokich twierdzeń z analizy Mikusiński stworzył teorię o dużych walorach poznawczych i praktycznych (na przykład zastosowania do elektrotechniki), która uzyskała szeroki rozgłos.

Teoria dystrybucji i teoria operatorów wchodzą już częściowo w zakres *analizy funkcjonalnej*. Głównymi ośrodkami analizy funkcjonalnej w Polsce są Warszawa i Poznań. Bezpośrednio po wojnie S. Mazur i W. Orlicz stworzyli teorię tak zwanych przestrzeni B_0, zwanych potem w literaturze zachodniej także przestrzeniami F. Chodzi tu o uogólnienie kapitalnego pojęcia przestrzeni Banacha przez zastąpienie postulatów co do normy mniej krępującymi warunkami, dzięki czemu uzyskuje się zastosowania do różnych działów analizy zarówno klasycznej (na przykład funkcje analityczne), jak i współczesnej (na przykład dystrybucje). Teorię tę stosowano również do zagadnienia metod limitacji ciągów i sumacji szeregów (mocne wyniki C. Rylla-Nardzewskiego i L. Włodarskiego). W Warszawie zajmowano się także teorią równań liniowych w przestrzeniach Banacha wprowadzając tu nowe pojęcie wyznacznika (T. Leżański i R. Sikorski). W Poznaniu rozwijano i uogólniono stworzoną przed wojną

teorię przestrzeni Orlicza (W. Orlicz, J. Musielak) oraz zbudowano teorię przestrzeni dwunormowych (A. Alexiewicz, Z. Semadeni). Strukturą przestrzeni funkcji ciągłych z różnych punktów widzenia zajmowali się Z. Ciesielski i Z. Semadeni. A. Pełczyński, Z. Semadeni i S. Rolewicz uzyskali interesujące twierdzenia o charakteryzacji topologicznych przestrzeni liniowych. W polskiej szkole analizy funkcjonalnej pojawiają się często nowe nazwiska bardzo młodych, utalentowanych matematyków, którzy odnoszą sukcesy bądź to w starszej, tak zwanej klasycznej, problematyce analizy funkcjonalnej, bądź w całkiem współczesnej, gdzie potrafią osiągnąć znaczną erudycję i wykorzystać ją w swoich pracach. Do nowszych dziedzin analizy funkcjonalnej należą tak zwane algebry Banacha i ich uogólnienia. U podłoża tej teorii leży przedwojenne odkrycie Mazura, lecz potem mało się nią w Polsce zajmowano. W ostatnich latach i na tym polu zaznaczył się u nas wyraźny postęp (W. Żelazko). Zastosowaniami analizy funkcjonalnej do problemów analitycznych w sensie właściwym, na przykład do równań różniczkowych i całkowych, zajmował się K. Maurin (autor monografii o metodach przestrzeni Hilberta), M. Altman (zastosowanie do metod numerycznych) i wielu matematyków zespołu krakowskiego. Dużo pracowano, zwłaszcza we Wrocławiu (E. Marczewski, C. Ryll-Nardzewski, S. Gładysz), nad teorią ergodyczną, która zaliczana bywa do analizy funkcjonalnej ze względu na metody dowodów i częściowo na samą treść wyników. Dzięki wzmocnieniu znanych twierdzeń tej teorii uzyskał C. Ryll-Nardzewski ważny rezultat, dowodząc, że funkcje słabo prawie-okresowe na grupach mają średnią. Problem ten długo opierał się specjalistom.

W zakresie *analizy harmonicznej* na grupach i funkcji prawie-okresowych powstały liczne prace S. Hartmana, C. Rylla-Nardzewskiego, Z. Semadeniego i innych.

W zakresie *funkcji rzeczywistych* jednej zmiennej rzeczywistej pracowała głównie szkoła łódzka (Z. Zahorski, J. Lipiński i ich uczniowie). Tematyka tych prac obejmowała mnogościową charakteryzację różnych klas funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej, charakteryzację zbiorów, w których funkcje lub ciągi funkcji określonego typu mają określoną własność itd. Nie jest to wprawdzie najmodniejszy w tej chwili na świecie kierunek badań, ale trzeba stwierdzić, że szkoła łódzka osiągnęła w tych badaniach prawdziwe mistrzostwo, dochodząc do rezultatów, których nie przekroczyli na ogół uczeni innych krajów (na przykład wyniki Zahorskiego co do funkcji pochodnych, twierdzenia Lipińskiego o punktach rozbieżności ciągu funkcji ciągłych do nieskończoności i wiele innych). Funkcjami zmiennej rzeczywistej, w szczególności ich własnościami związanymi z miarą Lebesgue'a zajmowano się także w innych ośrodkach, na przykład w Poznaniu i Wrocławiu. Tematem licznych prac była teoria miary, na przykład w latach czterdziestych kwestie związane z ogólnym

zagadnieniem miary (Mazur, Marczewski, Sikorski) i związki między niezależnością mnogościową a stochastyczną wraz z miarami w produktach (Marczewski, Sikorski). Zostało określone pojęcie miary zwartej (Marczewski, Ryll-Nardzewski) jako pewne naturalne zwężenie najogólniejszego pojęcia miary. Teoria miar zwartych była następnie stosowana przez różnych matematyków zagranicznych. Na gruncie teorii miary uprawiano we Wrocławiu teorię ergodyczną. Badania poszły tu w kierunku uogólnienia twierdzenia Birkhoffa, zastosowania do ułamków łańcuchowych i twierdzeń losowych. W następnych latach badania o tematyce ergodycznej przesunęły się do teorii grup topologicznych i analizy funkcjonalnej.

Od teorii miary i idei ergodycznych zaczęły się rozwijać powojenne badania w *teorii prawdopodobieństwa* (Steinhaus, Marczewski), a zwłaszcza w teorii procesów stochastycznych nie uprawianej w Polsce przed wojną, a po wojnie studiowanej i rozwijanej początkowo we Wrocławiu, potem także w Warszawie, a ostatnio w Poznaniu. Traktowane były procesy Poissona i różne ich uogólnienia (Ryll-Nardzewski), proces Gaussowski czyli miara Wienera (Ciesielski), różnego typu procesy Markowa, na przykład procesy urodzin i śmierci, procesy rozgałęzienia itd. Urbanik uzyskał efektowny wynik stwierdzający, że przy pewnych naturalnych założeniach populacja musi z prawdopodobieństwem jeden zmierzać do wymarcia lub do nieograniczonego rozmnożenia się. Zostało sprecyzowane pojęcie procesu efektywnego Steinhausa; uzyskano w tym zakresie mocne rezultaty (Steinhaus i Urbanik). Urbanik rozwinął teorię procesów stochastycznych, w których realizacjami są dystrybucje. Z innych wyników probabilistycznych trzeba wymienić prace M. Fisza i jego uczniów dotyczące m. in. twierdzeń granicznych o rozkładach dwu-punktowych i n-punktowych. Wyjaśniono w znacznym stopniu związki między wnioskowaniem statystycznym na podstawie prawdopodobieństwa a priori a wnioskowaniem opartym na pojęciu wiarogodności (J. Oderfeld, H. Steinhaus, S. Zubrzycki; później także matematycy węgierscy).

Teoria liczb tradycyjnie łączona z algebrą jest już w tym stuleciu dyscypliną samodzielną. Jej problematyka jest klasyczna: własności liczb, przede wszystkim naturalnych, gdy tymczasem algebra rozwinęła się w kierunku abstrakcyjnym. Obie dyscypliny mają sobie wzajemnie dużo do zawdzięczenia, zwłaszcza algebra teorii liczb, która dała początek nowym działom algebry. Jednak teoria liczb używa metod analitycznych co najmniej w takim samym stopniu jak algebraicznych. Przed wojną ważne wyniki z teorii liczb uzyskał w Polsce Wacław Sierpiński w pierwszym okresie swojej twórczości. Później pracowali na tym polu A. Walfisz (potem przez wiele lat w ZSRR) i S. Lubelski, zamordowany w czasie wojny, a poza tym nikt. Teoria liczb była podobnie jak algebra w zaniedbaniu. Już pierwsze lata powojenne przyniosły zmianę, do pracy

w dziedzinie teorii liczb bowiem powrócił Sierpiński i stworzył w Warszawie szkołę, w której wybił się szczególnie A. Schinzel. Szkoła ta używa przeważnie metod elementarnych; tak zwaną analityczną teorią liczb zainteresował się później młody matematyk poznański S. Knapowski. Jego nauczycielem został wybitny węgierski teoretyk liczb P. Turán. Wkrótce powstały poważne prace Knapowskiego dotyczące między innymi zmian znaku reszty w oszacowaniu ilości liczb pierwszych w postępach arytmetycznych. Otrzymano oszacowanie pewnych funkcji sumacyjnych związanych z rozkładem liczb pierwszych (S. Knapowski i W. Staś) oraz ideałów pierwszych według ich norm (Staś). Schinzel zajmował się badaniem oscylacji funkcji Eulera φ, częściowo wraz z chińskim matematykiem Wangiem. Nadto uzyskał ciekawe twierdzenia o rozkładzie pierwiastka kwadratowego z trójmianu kwadratowego na ułamek łańcuchowy i o tak zwanych liczbach Lehmera. We Wrocławiu badano ergodyczne własności ułamków łańcuchowych (Ryll-Nardzewski i Hartman) i aproksymacje diofantyczne z warunkami ubocznymi (Hartman, częściowo wspólnie z matematykiem węgierskim P. Szüszem). Ostatnio we Wrocławiu rozwinęła się tematyka dotycząca algebraicznej teorii liczb, a dokładniej odwzorowań ciał liczbowych przez wielomiany (interesujące wyniki W. Narkiewicza). Dotychczasowe rezultaty matematyków polskich w teorii liczb i kształcenie młodych adeptów w odpowiednich ośrodkach zagranicznych dobrze rokują o dalszym rozwoju tej dyscypliny w Polsce.

Zastosowania matematyki są działem w Polsce zupełnie nowym, a w pewnym sensie są nowe na świecie. Wprawdzie matematyka w ciągu całej swej historii służyła naukom przyrodniczym oraz technice i one były źródłem jej rozwoju, to jednak matematyka jest co najmniej od stu lat autonomiczna w stosunku do nauk przyrodniczych, a nieraz nawet współpraca matematyków z fizykami, mimo ścisłej współzależności tych nauk, trafia na przeszkody z powodu różnicy metod i odmiennego języka. Jednakże w ostatnich dziesięcioleciach nowe gałęzie techniki, jak automatyka, masowa produkcja, komunikacja międzyplanetarna postawiły matematyce nowe bezpośrednie zadania, które bynajmniej nie ograniczały się do stosowania gotowych metod i wzorów. Całe gałęzie matematyki, zwłaszcza pochodne teorii prawdopodobieństwa, jak teoria informacji i cybernetyka, zostały stworzone na użytek tych nowych wymagań postępu technicznego. Ściśle naukowo traktowane zagadnienia ekonomiczne, jak transport lub obsługa masowa, stały się przedmiotem badań matematycznych. Znacznie wzrósł zasięg zastosowań matematyki do nauki o przyrodzie żywej. Powstanie takich nazw, jak ekonometria, biometria, lingwistyka matematyczna, jest widomym znakiem obecności nowych typów zastosowań, które mają już swoje katedry, swoje monografie i czasopisma. Najefektowniejsze są zastosowania nu-

meryczne. Wynalazek maszyny elektronowej do szybkiego rachowania stał się źródłem żywej problematyki matematycznej, sięgającej nie tylko do różnych dziedzin analizy, ale nawet do działów do niedawna tak odległych od zastosowań jak algebra abstrakcyjna i logika matematyczna. Nie po raz pierwszy, ale szczególnie jaskrawo, manifestuje się tu nieoczekiwana praktyczna przydatność wysokich abstrakcji naukowych.

Jak w świetle tego ogromu zadań, przed którym stoją zastosowania, przedstawiają się polskie osiągnięcia dwudziestolecia? Można stwierdzić, że prace dotyczyły rozległych dziedzin. Pole zastosowań można z grubsza podzielić na cztery działy: nauki przyrodnicze wraz z rolnictwem i medycyną, gospodarka, fizyka i technika. Zakresy matematyki używane do obsługi tych działów, są to głównie probabilistyka i jej pochodne, analiza i geometria. Samodzielnym typem zastosowań o ogólnym znaczeniu są metody numeryczne i nauka o maszynach liczących.

Lata 1945-1947 były w dziedzinie zastosowań koniecznym okresem rozruchu. Następnie okrzepło przede wszystkim środowisko wrocławskie, później warszawskie. W obu przypadkach wielką rolę organizacyjną spełnił Państwowy Instytut Matematyczny (obecny Instytut Matematyczny PAN) stwarzając warunki do kolektywnej pracy. W pewnym stopniu, choć mniej, zajmowano się zastosowaniami w Lublinie, Poznaniu, Krakowie i Gdańsku, ostatnio dołączyła się również Łódź.

Znamienną cechą tej działalności było wytworzenie się nowego stylu współpracy między matematykami a osobami korzystającymi z ich pomocy. Polega on na tym, że matematycy nie czekają, aż tzw. praktycy przyniosą im swe zagadnienia w postaci matematycznej i wymagającej tylko rozwiązania. Przeciwnie — przyłączają się do pracy w bardzo wczesnym stadium, starają się zrozumieć zagadnienie praktyczne i wspólnie z praktykami budują jego model matematyczny.

W zakresie zastosowań do rolnictwa, biologii i medycyny największe osiągnięcia ma środowisko wrocławskie pod kierownictwem H. Steinhausa, J. Perkala, S. Zubrzyckiego i J. Łukaszewicza, przy udziale co najmniej kilkunastu innych osób. Zasięg wyników jest bardzo różnorodny. Plan zasiewów kukurydzy, matematyczny opis pokrycia łąk, klasyfikacja odmian pszenicy, praktyczne pomiary masy drzewnej w lasach — niech będą przykładami zastosowań do rolnictwa i leśnictwa. We współpracy z lekarzami opracowano metody statystycznego badania niektórych chorób. H. Steinhaus i J. Łukaszewicz ogłosili pracę z genetyki matematycznej o grupach krwi i dochodzeniu ojcostwa. J. Perkal w długiej serii prac badał cechy ilościowe charakteryzujące rozwój dziecka. Opracował też zagadnienie charakteryzacji obiektów za pomocą zespołu cech, co ma znaczenie dla nauk przyrodniczych w ogóle. J. Oderfeld i jego współpracownicy stworzyli system kontroli produktów, tak zwanych sztukowych i przekazali ten system do praktyki, szkoląc bardzo licznych

ekonomistów i inżynierów. Stosowano statystykę i teorię procesów stochastycznych do teorii złóż mineralnych (Zubrzycki), rozwinięto badania operacyjne i ich zastosowanie do problemu optymizacji gospodarczej (Steinhaus, Oderfeld, potem W. Szwarc, T. Pietrzykowski i inni). Inne zastosowania gospodarcze dotyczyły tak zwanej niezawodności urządzeń, jeszcze inne, zainicjowane przez O. Langego, problemów ekonometrycznych, jak analiza popytu (W. Sadowski). Niedawno zajęto się zagadnieniem masowej obsługi (J. Łukaszewicz i współpracownicy). Metody statystyczne stosowano również do badań struktury języka i utworów literackich.

Autorem głębokich badań w dziedzinie fizyki teoretycznej jest K. Urbanik. W zakresie fizyki statystycznej opracował on matematyczny schemat kaskady cząstek elementarnych jako procesu stochastycznego, a w podstawach mechaniki kwantowej stworzył, wspólnie z fizykiem R. Ingardenem, aksjomatyczną teorię entropii nie opartą na pojęciu prawdopodobieństwa. Potem zaś zastosował po raz pierwszy mechanikę kwantową do makrofizyki, tworząc pojęcie tak zwanego makrostanu oraz sformułował w języku matematycznym i udowodnił pewien wariant zasady wzrostu entropii. Jest to jeden z niewielu w Polsce przykładów bezpośredniej współpracy matematyka z fizykami. Inny przykład: prace K. Maurina, który zbudował aksjomatyczne podstawy kwantowej teorii pola. Trudno byłoby wymienić inne równie poważne osiągnięcia matematyków polskich w zakresie fizyki poza tymi działami, które są od dawna zmatematyzowane: mechaniką klasyczną i teorią względności. W krakowskiej szkole równań różniczkowych otrzymano liczne wyniki z teorii sterowania, na podstawie teorii równań kontyngensowych. Inne zastosowania techniczne równań różniczkowych uzyskano we Wrocławiu: J. Boroch i B. Lysik opracowali metodę obliczania powłok stosowaną już w praktyce. A. Rybarski podał praktyczne metody rozwiązywania równań drgań nieliniowych. Metody geometryczne stosowano w budownictwie, na przykład profil stadionu warszawskiego został obliczony przez E. Otto.

Zastosowania matematyki w wielu różnych placówkach naukowych są koordynowane przez tak zwany Zespół Problemowy 1/1, 1 pod kierownictwem J. Oderfelda. Godne wzmianki są kursy, które Instytut Matematyczny PAN organizuje dla inżynierów i które cieszą się coraz większym powodzeniem. Odbyło się 18 takich kursów, liczba uczestników osiąga 300 osób i więcej.

Rozwój *metod numerycznych* w Polsce był do niedawna utrudniony przez brak maszyn cyfrowych, a obecnie hamuje go w pewnej mierze gwałtowny rozwój zastosowań tych maszyn, ograniczający prace badawcze. M. Warmus, obecnie dyrektor Centrum Obliczeniowego PAN, jest twórcą nowej metody obliczania logarytmów. Ogłosił tablice obliczonych tą

metodą trzydziestosześciocyfrowych logarytmów naturalnych. Poza tym Warmus otrzymał ważne rezultaty z nomografii. Praktycznym metodom aproksymacji jednostajnej przez wielomiany i szacowaniu błędów poświęcił książkę S. Paszkowski, który obecnie we Wrocławiu szkoli pracowników naukowych i studentów w programowaniu i obsłudze maszyn cyfrowych. Znaczenie dla metod numerycznych mają wspomniane już wyniki Altmana oraz niektóre wyniki krakowskiej szkoły równań różniczkowych i katedry matematyki Politechniki Wrocławskiej. Zagadnienia algebro-logiczne związane ze schematami maszyn rachujących badane są w Warszawie w Dziale Podstaw Instytutu Matematycznego PAN (Z. Pawlak), a także we Wrocławiu (J. Słupecki i uczniowie).

Na zakończenie tego przeglądu wyjaśnimy, że nie objął on licznych prac zastosowań matematyki do techniki, pisanych przez niematematyków. Nie wątpimy, że ten dział będzie należycie uwzględniony w analogicznych referatach specjalistów techników.

*

Przechodzimy do krótkiego omówienia matematycznej działalności wydawniczej, która była ożywiona i w zupełności odpowiadała rozwojowi badań matematycznych w Polsce. Publikacje matematyczne wymagają specjalnie wyposażonych drukarni i specjalnie wyszkolonego personelu. Odpowiednia drukarnia pracowała przed wojną i pracuje nadal w Krakowie, a druga została zorganizowana we Wrocławiu staraniem B. Knastera, który opiekował się wydawnictwami matematycznymi już przed wojną, a bezpośrednio po wyzwoleniu przystąpił do ich odbudowy. Potem kierownictwo spraw wydawniczych przejął M. Stark.

Najbardziej rozpowszechnionym na świecie polskim czasopismem matematycznym są Fundamenta Mathematicae poświęcone podstawom matematyki, topologii i algebrze. Popularność tę zdobyły już przed wojną, wkrótce po założeniu w 1921 roku. Również przedwojenne wydawnictwo lwowskie Studia Mathematica zostało wznowione i jest poświęcone analizie funkcjonalnej i teorii prawdopodobieństwa. Annales Polonici Mathematici wychodzące w Krakowie zamieszczają prace z analizy, a wrocławskie Colloquium Mathematicum krótkie prace z różnych dziedzin, artykuły przeglądowe i otwarte zagadnienia. W Warszawie wychodzą Acta Arithmetica poświęcone teorii liczb z międzynarodowym komitetem redakcyjnym. Znaczna liczba publikacji matematycznych (ok. 90 rocznie) w postaci krótkich komunikatów ukazuje się w Biuletynie PAN. Oprócz tych periodyków drukujących wyłącznie w językach obcych wychodzą Zastosowania Matematyki oraz Prace Matematyczne i Wiadomości Matematyczne, drukujące także po polsku. Ostatnie dwa wymienione czaso-

pisma wydawane są przez Polskie Towarzystwo Matematyczne, a wszystkie pozostałe przez IMPAN. Nasze czasopisma matematyczne są obficie zasilane pracami autorów zagranicznych z wielu krajów. Większe prace ogłaszane bywają w nieperiodycznym wydawnictwie Rozprawy Matematyczne. W dwudziestoleciu ukazało się ok. 100 tomów czasopism matematycznych i ponad 220 tytułów książek. Książki typu monografii naukowych tworzą serię Monografii Matematycznych rozpoczętą jeszcze przed wojną i liczącą dziś 41 tytułów.

Podręczniki wydawane są przeważnie w osobnej serii pod nazwą Biblioteka Matematyczna. W dwudziestoleciu powojennym udało się objąć literaturą podręcznikową w języku polskim wszystkie zasadnicze przedmioty matematyczne w zakresie programów uniwersytetów i wyższych szkół technicznych, ekonomicznych i rolniczych. Przed wojną nie było prawie zupełnie podręczników matematyki wyższej pisanych po polsku. Dzięki wymianie polskich czasopism na wydawnictwa zagraniczne większe biblioteki matematyczne w Polsce otrzymują regularnie wszystkie ważniejsze czasopisma matematyczne z całego świata. Zakupy książek zagranicznych przebiegają jednak często ze znacznymi opóźnieniami. Biblioteka IMPAN jest jedną z najlepszych bibliotek matematycznych na świecie (około 18400 woluminów książek i 11300 woluminów periodyków oraz 316 starodruków). Biblioteka Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego niewiele jej ustępuje.

III

W świetle tych wszystkich danych można patrzeć na osiągnięcia matematyki polskiej w XX-leciu z satysfakcją. Bezwzględne porównanie dorobku i stanu matematyki polskiej ze stanem w innych krajach byłoby próżne. W Związku Radzieckim, gdzie matematyka już przed II wojną światową, a nawet i przed I (w Rosji przedrewolucyjnej) stała wysoko, nastąpił po drugiej wojnie tak bujny jej rozwój, że nie ma dziś dziedziny, w której nie znalazłoby się tam twórców najwyższej klasy. To samo można powiedzieć o Stanach Zjednoczonych. Choć przed II wojną, a zwłaszcza przed okresem rządów hitlerowskich w Niemczech, matematyka amerykańska nie grała wybitnej roli, to jednak potem stała się potężna, głównie wskutek imigracji uczonych z Europy (w tej liczbie z Polski), którzy stworzyli tam szkoły matematyczne. Z natury rzeczy nasza produkcja naukowa nie może się równać z produkcją tych olbrzymich krajów, wydaje się jednak, że w stosunku do wielkości naszego państwa stan matematyki u nas jest godny uznania i to mimo cieni i braków, które można by dostrzec.

W krajach mniejszych, jak Polska, przy organizowaniu badań matematycznych powstaje zagadnienie znalezienia najwłaściwszej drogi

między dwiema skrajnymi. Pierwsza z nich to uprawianie wszystkich ważniejszych działów matematyki, co jednak spowodować by musiało rozproszenie sił i niemożność współpracy i nie dawałoby szansy uzyskania liczniejszych wartościowych wyników. Druga, to metoda pracy zespołowej, a więc uprawianie tych samych dziedzin przez większe grupy pracowników, co daje poważne szanse uzyskania cennych rezultatów, ale pociąga za sobą ograniczenie się do stosunkowo niewielkiej ilości dyscyplin matematycznych i stwarza niebezpieczeństwo istotnych, a czasem nawet groźnych luk.

W dwudziestoleciu międzywojennym matematyka polska poszła wyraźnie drugą drogą, osiągając rezultaty, o których bez przesady powiedzieć można, że zadziwiły świat nauki. A co można powiedzieć o dwudziestoleciu powojennym? Zdobycie wybitnej pozycji w niektórych działach matematyki należało oczywiście potraktować nie jako utrwalenie naszej bierności w innych, ale jako stadium wyjściowe do objęcia badaniami szerszego zakresu. Dzisiaj można, jak sądzimy, stwierdzić trzy fakty: 1° W działach matematyki, które w Polsce międzywojennej były głównie uprawiane, utrzymana została wysoka pozycja matematyki polskiej. Wprawdzie wobec dalszego bujnego rozwoju tych działów w wielu krajach nie jest to dziś rola ani pionierska, ani przodująca, jak przedtem, ale powtarzamy — nadal ważna i poważna. 2° Istotne są osiągnięcia matematyków polskich w wielu dyscyplinach, które przedtem w Polsce były uprawiane tylko przez nielicznych badaczy, albo wcale. Należą tu np. niektóre działy analizy klasycznej i współczesnej, algebra, teoria prawdopodobieństwa i pewne działy fizyki matematycznej. W niektórych dziedzinach z powodzeniem rozpoczęto pracę ostatnio (funkcje analityczne wielu zmiennych, algebra homologiczna, nowoczesna geometria różniczkowa). 3° Istnieją teorie matematyczne, które w naszym kraju nie były i prawie nie są uprawiane, a właśnie w ostatnich latach weszły w stadium żywiołowego rozwoju i należą obecnie do najbardziej uprawianych na świecie: geometria algebraiczna, topologia różniczkowa i inne.

Rzecz prosta, trzeba będzie starannie rozważyć, czy jest celowe i możliwe dalsze rozszerzanie zakresu badań przez matematyków polskich w kierunkach obecnie „najmodniejszych". Należy wziąć pod uwagę, że już obecnie wielostronność matematyki polskiej jest możliwa tylko dzięki temu, że niektórzy z matematyków uprawiają twórczo po kilka różnych (nieraz odległych) dyscyplin. Chociaż potrafią osiągać w nich nadzwyczaj cenne wyniki, zjawisko samo niesie ze sobą pewne niebezpieczeństwo, bo wszechstronność u zbyt wielu badaczy może stanąć na przeszkodzie powstaniu ognisk wysoko wyspecjalizowanych, rozporządzających wielkim zasobem aktualnej wiedzy w danym kierunku.

Do zagadnienia wyboru drogi między omówionymi przedtem skraj-

nościami trzeba jeszcz dodać postulat, by nie były pomijane działy bezpośrednio związane z kierunkami badań, które się w Polsce rozwijają. Do niedawna np. zbyt mało wiedziano u nas o algebrze homologicznej, ważnym dzisiaj rozdziale matematyki, na styku algebry z topologią. Ponieważ w Polsce od dawna i z wielkim sukcesem uprawia się topologię, a od niedawna, również z sukcesem, algebrę, więc nie można było się pogodzić z brakiem specjalistów obeznanych z teorią leżącą na pograniczu tych dwóch dyscyplin. Obecnie nastąpiła już zmiana na korzyść, głównie dzięki młodym algebraikom i topologom. Zorganizowano nawet cykl wykładów z algebry homologicznej. Jest to ilustracja zdrowych i obiecujących tendencji dotrzymania kroku nauce światowej. Nadzieje sukcesu pokładać tu trzeba przede wszystkim w młodych uczonych.

Jednym z najlepszych sposobów właściwego doboru tematów i uniknięcia prowincjonalizmu są stałe kontakty z zagranicą. Kontaktów tych w ostatnich latach matematyce polskiej nie brakuje. Do Polski przyjeżdża rocznie 50-60 i więcej matematyków zagranicznych, zarówno pojedynczo na krótkie lub dłuższe pobyty naukowe, jak i po kilku lub kilkunastu zaproszonych na konferencje specjalne. Z Polski zagranicę wyjeżdża do różnych krajów i części świata 35-50 osób, niektóre kilkakrotnie, na pobyty indywidualne, na zjazdy i konferencje. Po kilkanaście osób rocznie wyjeżdża na dłuższe pobyty (ponad 3 miesiące) — dotyczy to przeważnie młodych. Większość wyjazdów następuje na zaproszenie strony zagranicznej, co jest godne podkreślenia, jako obiektywny dowód uznania, jakim cieszą się osiągnięcia polskie. Zapraszani bywają także matematycy młodzi. W Polsce urządza się co pewien czas tzw. konferencje specjalistyczne, albo krajowe, z udziałem gości zaproszonych z zagranicy, albo międzynarodowe, niektóre pod egidą Międzynarodowej Unii Matematycznej.

Przy całym nasileniu wymiany uczonych z zagranicą formy tej współpracy nie są w pełni zadowalające. Przede wszystkim wyjazdy wymagają długich i skomplikowanych formalności, a jeżeli chodzi o wizyty matematyków zagranicznych, zwłaszcza starszych, którzy reprezentują wysoki autorytet naukowy, to są one z reguły za krótkie. Korzyść z wysłuchania jednego lub dwóch odczytów jest ograniczona. Pełną korzyść z pobytu uczonego zagranicznego będzie można osiągnąć, jeśli pozostanie on w Polsce przez semestr lub przez rok i będzie w tym czasie prowadził systematyczne wykłady i seminaria. Taką instytucję profesorów odwiedzających (*visiting professor*, *Gastprofessor*) znają liczne uniwersytety w Europie i Ameryce. Wciąż zbyt rzadkie i ograniczone są wizyty matematyków radzieckich.

Perspektywy dalszego postępu matematyki w Polsce są wobec coraz szybszego tempa jej dotychczasowego rozwoju niewątpliwie dobre. Rosnące zapotrzebowanie na matematyków w przemyśle, gospodarce

i technice, coraz większy zasięg zastosowań matematyki i wynikający stąd wzrost roli matematyki w kształceniu studentów różnych wydziałów szkół wyższych — oto czynniki sprzyjające klimatowi matematycznemu w Polsce. Czynnikiem niesprzyjającym jest zbyt niski poziom nauczania w szkołach średnich i przestarzałe programy. Przeszkadza to ujawnieniu się i rozwojowi zdolności matematycznych u młodzieży i nie pozwala jej wytworzyć sobie choćby w przybliżeniu słusznego pojęcia o istocie i roli matematyki, ani też trafnie ocenić, jakie możliwości praktyczne stoją dziś przed matematykiem i stać mogą w przyszłości. Skutkiem tej ignorancji jest masowe zgłaszanie się na studia matematyczne kandydatów nieodpowiednich i obawa przed tymi studiami u wielu tych, którzy powinni je wybrać. Akcja uświadamiająca prowadzona przez Polskie Towarzystwo Matematyczne we współpracy z nauczycielami nie wystarcza. Olimpiady matematyczne, mimo że pozwalają wyłowić talenty i są już dzisiaj wypróbowaną instytucją, nie wystarczają również. Dopiero stopniowe podniesienie matematyki szkolnej na wyższy poziom może zaradzić złu. Wymaga to również uczynienia zawodu nauczyciela bardziej atrakcyjnym, żeby młodzież nie stroniła od niego. Dobrzy studenci — z nich dobrzy nauczyciele, z rąk lichych nauczycieli źli studenci i źli potem nauczyciele. Tylko uparty wysiłek władz, uczelni i szkół może wyprowadzić z tego pozornie błędnego koła.