ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1964)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

R. KRASNODĘBSKI (Wrocław)

Prosty dowód twierdzenia Laplace'a

W niniejszej nocie przedstawiam dowód ogólnego twierdzenia Laplace'a o rozwinięciu wyznacznika. Prostota dowodu została osiągnięta przez wprowadzenie uogólnionego symbolu Ricciego (por. [1], str. 84). Inny krótki i prosty dowód pochodzący od Czebotariewa można znaleźć w książce Ślebodzińskiego [2]. Zrozumienie jednak tego dowodu w postaci podanej przez Ślebodzińskiego wymaga znajomości symboliki teorii form zewnętrznych.

1. Wprowadźmy następujące oznaczenia wskaźników przebiegających zbiór liczb $1, \ldots, n$:

$$i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_{n-r}, \quad r = 1, \ldots, n,$$

oraz niech będzie stale

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_r, \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-r}, \tag{1}$$

ponadto każdy wskaźnik j jest różny od każdego wskaźnika i.

Analogicznie dla wskaźników p i q

$$p_1, \ldots p_r, q_1, \ldots, q_{n-r}, \quad r = 1, \ldots, n,$$
$$p_1 < p_2 < \ldots < p_r, \quad q_1 < q_2 < \ldots < q_{n-r}$$

i ponadto każdy wskaźnik q jest różny od każdego wskaźnika p.

Permutacje $h_1 \ldots h_n$, $k_1 \ldots k_n$ są permutacjami liczb $1, \ldots, n$, permutacja $i_{t_1} \ldots i_{t_r}$ jest permutacją liczb $i_1, \ldots, i_r$, a permutacja $j_{t_1} \ldots j_{t_{n-r}}$ liczb $j_1, \ldots, j_{n-r}$.

Oznaczmy

$$1 + \ldots + r = R, \quad i_1 + \ldots + i_r = I, \quad p_1 + \ldots + p_r = P.$$

Uogólniony symbol Ricciego ma następującą postać:

$$\varepsilon^{i_1 \ldots i_r}_{i_1 \ldots i_r} = \begin{cases} +1, & \text{jeśli permutacja } i_{t_1} \ldots i_{t_r} \text{ jest parzysta,} \\ -1, & \text{jeśli permutacja } i_{t_1} \ldots i_{t_r} \text{ jest nieparzysta.} \end{cases} \tag{2}$$

Definicję wyznacznika macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

napiszemy za pomocą symbolu (2) w sposób następujący:

$$\det A = \varepsilon_{1\dots n}^{h_1\dots h_n} a_{1h_1} \cdot \dots \cdot a_{nh_n}, \tag{3}$$

gdzie sumowanie jest rozciągnięte na wszystkie permutacje $h_1 \dots h_n$.

2. Udowodnimy dwa lematy.

LEMAT 1. *Dla ustalonej permutacji $k_1 \dots k_n$ mamy*

$$\det A = \eta \varepsilon_{k_1\dots k_n}^{h_1\dots h_n} a_{1h_1} \cdot \dots \cdot a_{nh_n} = \eta \varepsilon_{1\dots n}^{h_1\dots h_n} a_{k_1 h_1} \cdot \dots \cdot a_{k_n h_n},$$

gdzie $\eta = +1$ lub -1 zależnie od tego, czy permutacja $k_1 \dots k_n$ jest parzysta czy nieparzysta.

Każda transpozycja wskaźników $1, \dots, n$ w symbolu $\varepsilon_{1\dots n}^{h_1\dots k_n}$ powoduje zmianę znaku we wszystkich wyrazach sumy po prawej stronie wzoru (3) — stąd prawdziwość pierwszej części lematu.

Każda transpozycja wskaźników $1, \dots, n$ występujących w iloczynach $a_{1h_1} \cdot \dots \cdot a_{nh_n}$ powoduje zmianę znaku we wszystkich wyrazach sumy we wzorze (3). Dokonajmy na przykład transpozycji wskaźników 1 i 2. W pierwszym kroku zmieńmy w każdym wyrazie kolejność początkowych dwóch czynników — znak żadnego wyrazu nie ulegnie zmianie. W drugim kroku dokonajmy transpozycji (h_1, h_2) w symbolach $\varepsilon_{1\dots n}^{h_1\dots h_n}$ — znak wszystkich wyrazów zmieni się na przeciwny. W trzecim, ostatnim kroku, zmieńmy oznaczenia wskaźników sumowania h_2, h_1 na h_1, h_2 — co znów nie zmieni znaku. Operacje te można zapisać w sposób następujący:

$$\varepsilon_{12\dots n}^{h_1 h_2\dots h_n} a_{1h_1} \cdot a_{2h_2} \cdot \dots \cdot a_{nh_n} = \varepsilon_{12\dots n}^{h_1 h_2\dots h_n} a_{2h_2} \cdot a_{1h_1} \cdot \dots \cdot a_{nk_n} =$$
$$= -\varepsilon_{12\dots n}^{h_2 h_1\dots h_n} a_{2h_2} \cdot a_{1h_1} \cdot \dots \cdot a_{nh_n} = -\varepsilon_{12\dots n}^{h_1 h_2\dots h_n} a_{2h_1} \cdot a_{1h_2} \cdot \dots \cdot a_{nh_n}.$$

Druga część lematu jest więc udowodniona.

LEMAT 2. *Parzystość permutacji $i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{n-r}$ jest równoważna parzystości liczby $I-R$.*

Istotnie, liczba transpozycji, których należy dokonać kolejno na liczbach $j_1, \dots, j_{n-r}$ na to, aby otrzymać permutację $1 \dots n$, jest równa liczbie

$$[r-(j_1-1)]+[r-(j_2-2)]+\dots+[r-(j_{n-r}-n+r)].$$

Stąd teza lematu.

3. W oznaczeniach poprzednich ustępów *twierdzenie Laplace'a* ma postać

$$(4)\quad \det A = \sum_{i_1 \dots i_r} (-1)^{P+I} \det \begin{bmatrix} a_{p_1 i_1} & \dots & a_{p_1 i_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p_r i_1} & \dots & a_{p_r i_r} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} a_{q_1 j_1} & \dots & a_{q_1 j_{n-r}} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q_{n-r} j_1} & \dots & a_{q_{n-r} j_{n-r}} \end{bmatrix},$$

gdzie sumowanie jest rozciągnięte na wszystkie wskaźniki $i_1, \dots, i_r$ spełniające warunki (1), a wskaźniki $p_1, \dots, p_r$ są ustalone i oznaczają numery wierszy, względem których rozwijamy wyznacznik.

Dowód. Prawą stronę wzoru (4) można napisać w myśl definicji (3) w sposób następujący:

$$(5)\quad \sum_{i_1 \dots i_r} (-1)^{P+I} \varepsilon_{i_1 \dots i_r}^{i_{l_1} \dots i_{l_r}} a_{p_1 i_{l_1}} \cdot \dots \cdot a_{p_r i_{l_r}} \cdot \varepsilon_{j_1 \dots j_{n-r}}^{j_{t_1} \dots j_{t_{n-r}}} a_{q_1 j_{t_1}} \cdot \dots \cdot a_{q_{n-r} i_{t_{n-r}}},$$

gdzie, podobnie jak we wzorze (3), sumowanie jest odpowiednio rozciągnięte na wszystkie permutacje $i_{l_1} \dots i_{l_r}$ liczb $i_1, \dots, i_r$ i na wszystkie permutacje $j_{t_1} \dots j_{t_{n-r}}$ liczb $j_1, \dots, j_{n-r}$. Wobec równości

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_r}^{i_{l_1} \dots i_{l_r}} \varepsilon_{j_1 \dots j_{n-r}}^{j_{t_1} \dots j_{t_{n-r}}} = \varepsilon_{i_1 \dots i_r}^{i_{l_1} \dots i_{l_r}} {}^{j_{t_1} \dots j_{t_{n-r}}}_{j_1 \dots j_{n-r}}$$

wyrażenie (5) jest równe

$$(6)\quad \sum_{i_1 \dots i_r} (-1)^{P+I} \varepsilon_{i_1 \dots i_r}^{i_{l_1} \dots i_{l_r}} {}^{j_{t_1} \dots j_{t_{n-r}}}_{j_1 \dots j_{n-r}} a_{p_1 i_{l_1}} \cdot \dots \cdot a_{p_r i_{l_r}} \cdot a_{q_1 j_{t_1}} \cdot \dots \cdot a_{q_{n-r} i_{t_{n-r}}},$$

a wobec lematów 1 i 2 to wyrażenie jest równe

$$(7)\quad \sum_{i_1 \dots i_r} (-1)^{P+I} \cdot (-1)^{I-R} \cdot (-1)^{P-R} \varepsilon_{1 \dots r}^{i_{l_1} \dots i_{l_r}} {}^{j_{t_1} \dots j_{t_{n-r}}}_{r+1 \dots n} a_{1 i_{l_1}} \cdot \dots \cdot a_{r i_{l_r}} \times$$

$$\times\, a_{r+1 j_{t_1}} \cdot \dots \cdot a_{n j_{t_{n-r}}}.$$

Każda permutacja liczb $i_{l_1}, \dots, i_{l_r}, j_1, \dots, j_{t_{n-r}}$ jest jakąś permutacją liczb $1, \dots, n$ i na odwrót — zatem wyrażenie (7) jest identyczne z prawą stroną wzoru (3), co dowodzi prawdziwości twierdzenia Laplace'a.

Prace cytowane

[1] S. Gołąb, *Rachunek tensorowy*, Warszawa 1956.

[2] W. Ślebodziński, *Formes extérieures et leurs applications*, vol. I, Warszawa 1954.