ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1964)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

H. STEINHAUS (Wrocław)

O równowadze obojętnej

Czy bryła materialna, która w każdej orientacji na poziomym stole jest w równowadze, musi mieć kształt sfery? Na to pytanie St. Ulama zawarte w pracy [1] dałem niedawno twierdzącą odpowiedź w nocie [2]. Teraz wracam do tej sprawy dlatego, że w nocie [2] użyłem takiego kryterium równowagi, które wymaga znajomości mechaniki i wcale nie wynika z tego, co mówią o statyce szkolne podręczniki fizyki. Odpowiedź na pytanie zawarte w pracy [1] podana w nocie [2] nie ulegnie zmianie:

TWIERDZENIE. *Warunkiem koniecznym (i dostatecznym) tego, żeby bryła sztywna, leżąca na poziomym stole i poddana pionowej, stałej sile grawitacyjnej, była w równowadze w każdej orientacji względem stołu, jest sferyczność jej powierzchni oraz takie rozmieszczenie materii, żeby środek ciężkości bryły był środkiem geometrycznym sfery powierzchniowej.*

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia, należy zauważyć, że dostateczność warunku wyrażonego w tekście jest oczywista. Musimy także podać elementarne kryterium równowagi, skoro nie chcemy się powoływać na kryterium użyte w nocie [2]. Oto jego brzmienie:

Bryła sztywna, leżąca na poziomym stole i poddana stałej grawitacji, jest w równowadze wtedy i tylko wtedy, gdy prosta pionowa wiodąca przez środek ciężkości trafia w każdy obszar wypukły zawierający wszystkie punkty styczności bryły ze stołem — mamy na myśli obszary leżące na stole.

Niniejsze kryterium pozwala nam traktować twierdzenie jako problemat geometryczny. Dowód składa się z pięciu części (§§ 1-5).

§ 1. Zakładamy, że bryła B jest w równowadze obojętnej (czyli astatycznej) na poziomym blacie stołu, czyli na płaszczyźnie poziomej P. Można nadać bryle B w przestrzeni dowolną orientację, a następnie podstawić pod nią poziomy blat P — bryła zachowa równowagę dzięki pionowym siłom grawitacji i reakcji; w każdym takim położeniu płaszczyzna P jest „podpierającą" bryły B. W geometrii nazywamy *płaszczyzną podpierającą bryłę* B taką płaszczyznę, która ma punkty wspólne z B, jednak po jednej stronie płaszczyzny nie ma wcale punktów należących do B.

Wobec tego, jakkolwiek położylibyśmy B na P, P będzie „podpierającą" bryły B. Możemy więc studiować wszelkie położenia B na P ustaliwszy bryłę B w przestrzeni i nadając płaszczyźnie ruchomej wszystkie możliwe położenia, w których ta płaszczyzna dotyka B, ale po jednej stronie płaszczyzny nie ma punktów należących do B. Bryła B nie musi być wypukła — niniejsze rozważania geometryczne wcale tego nie wymagają. Jeżeli w każdym takim położeniu, jakie właśnie określiliśmy, usuniemy w przestrzeni wszystkie punkty leżące po stronie przeciwnej do B, to punkty, które nie zostaną usunięte nigdy, utworzą nową bryłę B' — jest widoczne, że B' jest *najmniejszą bryłą wypukłą* zawierającą B.

Musimy zauważyć, że na razie nie zajmujemy się rozmieszczeniem materii w bryle B, ani w B' — wyobrażamy sobie, że bryła B ma powierzchnię S, a bryła B' powierzchnię S'; zarówno S jak S' są zrealizowane jako materialne, twarde i sztywne błony o masie zerowej i grubości zerowej. Utwórzmy teraz bryłę $B+S'$ i nazwijmy ją $\bar{B}$ — jest widoczne, że ta nowa bryła może zastąpić bryłę B w zagadnieniu równowagi, bo S' ma masę zero, a te same płaszczyzny P, które stykały się z B, stykają się z $\bar{B}$, i na odwrót. Bryła $\bar{B}$ jest wypukła.

§ 2. Środek masy (czyli środek ciężkości) bryły $\bar{B}$ nazwiemy C; C jest także środkiem masy bryły B. Niech $\bar{B}$ leży na stole P. Przez C prowadzimy pionową, to znaczy prostopadłą do P płaszczyznę E, która przecina P wzdłuż prostej poziomej L, a S' wzdłuż „południka" W. Ponieważ bryła $\bar{B}$ jest w równowadze, więc — według kryterium poprzedzającego § 1 — rzut pionowy Q punktu C na P należy do domkniętego i wypukłego zbioru K złożonego z punktów wspólnych S' i P; $K = S'P$, $Q \in K$. Wobec tego południk W jest wypukłą krzywą zamkniętą na B, która z L ma co najmniej jeden punkt wspólny, mianowicie Q, a „promień" CQ jest prostopadły do L. Wobec tego możemy zapytać, czy jest możliwe toczenie południka W po torze L i — tym samym — bryły $\bar{B}$ związanej z W po P. To pytanie nie jest banalne, bo nie wiemy, czy płaszczyzny styczne do S' w punktach należących do W są prostopadłe do płaszczyzny E — gdyby tak było, odpowiedź byłaby pozytywna. Innymi słowy: obawiamy się, czy przy toczeniu bryły $\bar{B}$ po P tak, żeby każdy punkt bryły poruszał się po płaszczyznach pionowych i równoległych do E, południk W nie oderwie się od P, a więc od toru L. Wtedy jednak rzut Q punktu C na L znajdzie się poza S', a więc poza K, co według kryterium uniemożliwia równowagę w takiej pozycji. Tak więc skrupuł odpada: można toczyć bryłę $\bar{B}$ po P tak, żeby południk W toczył się po L.

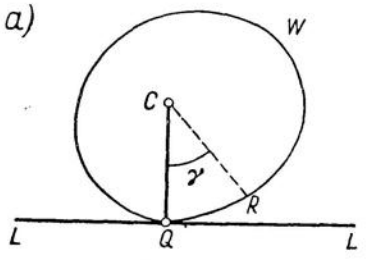
§ 3. Dzięki § 2 sprowadziliśmy zagadnienie do toczenia płaskiej i wypukłej krzywej po linii prostej, przy czym z krzywą tą W jest związany punkt C, a jego rzut prostopadły Q na tę linię L musi zawsze leżeć na W. Naszym celem jest dowód, że W w takich warunkach musi być

kołem(1), a C środkiem tego koła. Musimy uwzględnić trzy możliwe położenia chwilowe podczas ruchu:

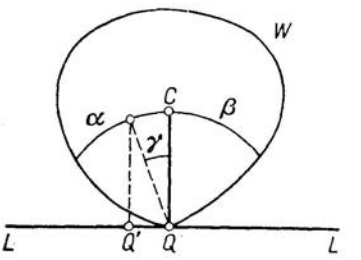
a) L jest jedyną styczną do W w punkcie Q, a Q jedynym punktem wspólnym W i L.

b) L przechodzi przez punkt Q, ale W ma w punkcie Q dwa promienie styczne tworzące kąt mniejszy od 180° — C leży na polu tego kąta.

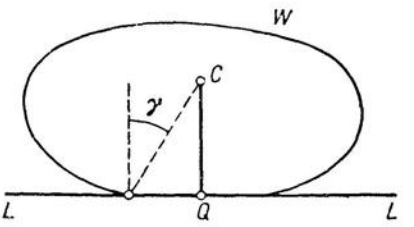
c) L i W mają cały odcinek wspólny, a punkt Q leży na tym odcinku. Oto graficzne przedstawienie położeń a), b) i c):



Rys. a



Rys. b



Rys. c

Zajmiemy się naprzód przypadkami b) i c). W przypadku b) toczenie w lewo przechyli QC o kąt γ; jeżeli γ jest mniejsze od α, to C znajdzie się w takim położeniu, że jego rzut Q' na L znajdzie się zewnątrz W, a więc poza S', a więc poza K, co uniemożliwia równowagę (por. § 2, przedostatnie zdanie). W przypadku c) toczenie w lewo będzie obrotem koła lewego końca odcinka wspólnego krzywej W i prostej L — jeżeli ten obrót będzie mniejszy niż kąt γ, to ów lewy koniec stanie się jedynym punktem wspólnym W i L, a rzut C na L znajdzie się na prawo od tego punktu, a więc zewnątrz W, co — jak widzieliśmy przed chwilą — prowadzi do sprzeczności. Wobec tego tylko położenie a) jest możliwe — do niego odnosi się § 4:

(1) Autor używa wyrazu „koło" w znaczeniu *circulus, circle,* Kreis.

§ 4. Wykażemy teraz, że fakt wykazany przed chwilą, a więc idealna wypukłość krzywej W, równoznaczna z tym, że podczas toczenia W po L utrzymuje się wciąż sytuacja a), pociąga za sobą, że W jest kołem, a C jego środkiem.

Na rysunku a) uważajmy punkt Q za początek układu x, y; styczna L do W w punkcie Q niech będzie osią x-ów, a normalna QC osią y-ów; kąt ϑ liczy się od CQ w kierunku antyzegarowym do CR. Mamy więc dwa układy określające położenie dowolnego punktu R na W: układ prostokątny x, y oraz biegunowy r, ϑ, jeżeli r oznacza długość odcinka CR. Styczność osi x do W w punkcie Q daje się wyrazić przez $dy/dx = 0$ dla $x = 0$, jeżeli $y = y(x)$ opisuje część W leżącą w otoczeniu Q. Ale Q ma współrzędne $x = 0$, $y = 0$, więc $y'(0) = 0$ daje

$$\lim_{x \to 0} y/x = 0. \tag{1}$$

Mamy jednak dla $0 < |\vartheta| < 1$

$$x = r(\vartheta)\sin\vartheta, \qquad y = r(0) - r(\vartheta)\cos\vartheta,$$

a więc — wobec (1) —

$$\lim_{\vartheta \to 0} \frac{r(0) - r(\vartheta)(1 - \vartheta^2/2! + \vartheta^3/3! - \ldots)}{\sin\vartheta \cdot r(\vartheta)} = 0. \tag{2}$$

Ponieważ $\lim_{\vartheta \to 0} \sin\vartheta/\vartheta = 1$, więc można we wzorze (2) zastąpić $\sin\vartheta$ przez ϑ i napisać

$$0 = \lim_{\vartheta \to 0} \frac{r(0) - r(\vartheta) + r(\vartheta)\{\vartheta^2/2! - \vartheta^3/3! + \ldots\}}{\vartheta r(\vartheta)} = \tag{3}$$

$$= \lim_{\vartheta \to 0} \frac{[r(0) - r(\vartheta)]/\vartheta + r(\vartheta)\{\vartheta/2! - \vartheta^2/3! + \ldots\}}{r(\vartheta)}.$$

Wobec $r(0) \neq 0$ wzór (3) prowadzi do

$$\lim_{\vartheta \to 0} \left(-\frac{r(0) - r(\vartheta)}{\vartheta} + r(\vartheta)\{\quad\} \right) = 0, \tag{4}$$

a ponieważ dla $|\vartheta| < 1$ jest $|\{\ \}| \leqslant |\vartheta|$, więc wyraz $\{\ \}$ dąży do zera dla $\lim \vartheta = 0$. Z tego wynika, że

$$\lim_{\vartheta \to 0} \frac{r(0) - r(\vartheta)}{\vartheta} = 0, \tag{5}$$

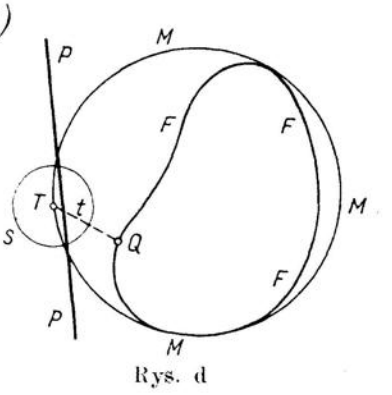
a więc istnieje pochodna $dr/d\vartheta$ dla $\vartheta = 0$ i jest zerem: $r'(0) = 0$. Ale punkt $\vartheta = 0$ nie różni się od innych punktów na W, bo można w każdym punkcie krzywej W narysować styczną L — nasz rachunek korzysta wyłącznie z tego, że wszystkie promienie z C są normalnymi krzywej W, która

jest idealnie wypukła. Mamy więc $r'(\vartheta) = 0$ dla wszystkich ϑ, a stąd wynika, że funkcja $r(\vartheta)$ jest stała: $r(\vartheta) = r(0) = CQ$ dla wszystkich ϑ. Wobec tego krzywa W jest kołem, a C jest środkiem tego koła. Z tego wnosimy natychmiast, że każdy przekrój powierzchni S' wiodący przez C jest kołem o środku w C. Z tego bezpośrednio wynika, że dla dwóch dowolnych punktów Q_1 i Q_2 leżących na S' płaszczyzna wiodąca przez Q_1, Q_2 i C wycina z S' koło o środku w C, które oczywiście przechodzi przez C, a więc $CQ_1 = CQ_2$; stąd wniosek, że wszystkie punkty Q na S' są jednakowo odległe od C, a więc S' jest sferą, a C środkiem tej sfery.

§ 5. Brak jeszcze jednego kroku do celu: wykazaliśmy przed chwilą, że S' jest sferą o środku w C, a twierdzenie wygłoszone we wstępie do tej noty orzeka, że S jest sferą o środku w C. Jak wiemy, S' jest najmniejszą powierzchnią wypukłą obejmującą S — wobec tego osiągniemy nasz cel, gdy udowodnimy następujący lemat ogólny:

Jeżeli najmniejsza powierzchnia zamknięta i wypukła M spośród powierzchni obejmujących zamkniętą powierzchnię F jest sferą, to zachodzi identyczność $M = F$.

Dowód. Przypuśćmy, że M nie jest identyczna z F. Ponieważ punkty M mogą leżeć tylko na F lub zewnątrz F, więc założenie $M \neq F$ pociąga za sobą istnienie punktu T na M, który leży zewnątrz F. Wtedy na F istnieje punkt Q, najbliższy punktowi T ze wszystkich punktów F, a odległość $QT = d > 0$. Niech s oznacza sferę o promieniu $\frac{1}{2}d$, której środek leży w T — sfera s przecina sferę M wzdłuż małego kółka k. Jeżeli przez k poprowadzimy płaszczyznę p, to otrzymamy tarczę kołową t, która leży całkowicie zewnątrz F. Dzieli ona M na dwie czasze, z których jedna nie ma żadnych punktów wspólnych z F. Jeżeli tę czaszę usuniemy, a zamiast niej użyjemy tarczy t wraz z pozostałą czaszą, otrzymamy nową powierzchnię M' wypukłą, obejmującą F a mieszczącą się w M, bo niektóre jej punkty leżą w obszarze objętym przez M, natomiast cała usunięta część czaszy M leży poza M'. Ta sprzeczność z definicją sfery M implikuje $M = F$.



Rys. d

W pracy [1] postawiono pytanie, czy bryła ograniczona twardą i nieprzemakalną powłoką, która w każdej orientacji w wodzie zachowuje równowagę, musi mieć powłokę sferyczną. To pytanie dotychczas nie znalazło odpowiedzi — ponieważ bryła jest poddana nie tylko grawitacji, lecz i wyporowi wody („sile Archimedesa"), więc jest ono trudniejsze od tego, które pochodzi z tejże pracy, a które tutaj właśnie przestudiowaliśmy.

Prace cytowane

[1] S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience Publ., Inc., New York 1960. Chap. III 2, p. 38.

[2] H. Steinhaus, *A note on astatic equilibrium*, Bull. de l'Acad. Pol. des Sciences, Série math., astr., phys. Vol. XI, 4 (1963), p. 173.