ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1964)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

Uwagi do pewnego zagadnienia P. Erdösa

W swej publikacji *Quelques problèmes de la Théorie des Nombres*, która się niedawno ukazała w wydawnictwie Monographies de l'Enseignement Mathématique Nr 6, na str. 135 P. Erdös, jako zagadnienie 75, wypowiada następujące

TWIERDZENIE T. *Każda liczba wymierna w, zawarta między 0 a $\frac{1}{6}\pi^2-1$ może być rozłożona na sumę postaci*

$$w = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2}, \tag{1}$$

gdzie x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ są liczbami naturalnymi rosnącymi.

P. Erdös pisze, że jego dowód tego twierdzenia nie został ogłoszony drukiem i że wyniki ogólniejsze ukażą się w pracy R. Grahama będącej w druku w Proc. London Math. Soc. (Ob. R. Graham, *On sums of reciprocals of integers*, Notices Amer. Math. Soc. (1961), p. 610).

Dowód P. Erdösa jego twierdzenia T nie jest mi znany. Nasuwają mi się tu następujące uwagi:

Przede wszystkim warunek twierdzenia T, żeby liczba wymierna w spełniała nierówność $0 < w < \frac{1}{6}\pi^2-1$, nie jest konieczny. Ze znanego bowiem rozwinięcia liczby $\frac{1}{6}\pi^2$ na szereg nieskończony wynika, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba naturalna m taka, że

$$\tfrac{1}{6}\pi^2-\varepsilon < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{m^2}.$$

Liczba wymierna

$$w = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} > \tfrac{1}{6}\pi^2-\varepsilon$$

daje żądany przez Erdösa rozkład.

A. Schinzel wyprowadził z twierdzenia T następujące

TWIERDZENIE S. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, żeby liczba wymierna w dawała rozwinięcie* (1), *gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są licz-*

bami naturalnymi rosnącymi jest, aby było albo $0 < w < \frac{1}{6}\pi^2 - 1$, *albo też* $1 \leqslant w < \frac{1}{6}\pi^2$.

Dowód. Jeżeli $w = 1$, to mamy $w = \frac{1}{1^2}$. Jeżeli zaś w jest liczbą wymierną, taką że $1 < w < \frac{1}{6}\pi^2$, to $0 < w - 1 < \frac{1}{6}\pi^2 - 1$ i, w myśl twierdzenia T, istnieje rozkład

$$w - 1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2},$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liczbami naturalnymi rosnącymi. Lecz wobec $w - 1 < \frac{1}{6}\pi^2 - 1 < 1$ musi być $x_1 > 1$ i dla liczby w mamy rozkład

$$w = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{x_1^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2}, \quad \text{gdzie} \quad 1 < x_1 < \ldots < x_n.$$

Z twierdzenia T wynika więc, że warunki twierdzenia S są dostateczne. Aby dowieść, że są one też konieczne, przypuśćmy, że w jest liczbą wymierną, taką że $\frac{1}{6}\pi^2 - 1 \leqslant w < 1$. Gdyby dla liczby w zachodził wzór (1), gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liczbami naturalnymi rosnącymi, to, wobec $w < 1$, musiałoby być $x_1 \geqslant 2$, zatem (wobec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$)

$$w = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2} \leqslant \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{6}\pi^2 - 1,$$

wbrew założeniu co do liczby w. Nie może też być $w \geqslant \frac{1}{6}\pi^2$, gdyż liczba w, dla której zachodzi wzór (1), gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liczbami naturalnymi rosnącymi, jest zawsze mniejsza od $\frac{1}{6}\pi^2$. Warunki twierdzenia S są więc konieczne. Dowiedliśmy więc, że z twierdzenia T wynika twierdzenie S.

Nasuwa się dalej pytanie, jakie postępowanie daje dla danej liczby wymiernej w, spełniającej warunki twierdzenia T, żądany w tym twierdzeniu rozkład. W szczególności, czy doprowadzi do tego zawsze postępowanie następujące.

Dla liczby wymiernej w, spełniającej warunki twierdzenia T wyznaczamy najmniejszą liczbę naturalną x_1 taką, że $w \geqslant \frac{1}{x_1^2}$. Jeżeli $w > \frac{1}{x_1^2}$, to dla liczby wymiernej $w_1 = w - \frac{1}{x_1^2}$ wyznaczamy najmniejszą liczbę naturalną $x_2 > x_1$, taką że $w_1 \geqslant \frac{1}{x_2^2}$. Jeżeli $w_1 > \frac{1}{x_2^2}$, to dla liczby $w_2 = w_1 - \frac{1}{x_2^2}$ wyznaczamy najmniejszą liczbę naturalną $x_3 > x_2$, taką

że $w_2 \geqslant \frac{1}{x_3^2}$ itd. Czy postępując w ten sposób dojdziemy zawsze do rozwinięcia (1), spełniającego warunki twierdzenia T? A jeżeli nie, to jaki jest przykład liczby wymiernej, dla której nasze postępowanie doprowadza do rozwinięcia w szereg nieskończony?

Postępowanie nasze wymaga uciążliwych rachunków, nawet jeżeli chodzi o bardzo proste liczby wymierne, na przykład o liczby $\frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{3}$. Znam rozwinięcie liczby $\frac{1}{2}$ spełniające warunki twierdzenia T, ale nie uzyskane za pomocą naszego postępowania. Jest to rozwinięcie

$$(2) \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{36^2} + \frac{1}{45^2} + \frac{1}{60^2}.$$

W celu sprawdzenia tej równości należy zauważyć, że

$$\frac{1}{7^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{21^2} = \frac{1}{6^2}, \qquad \frac{1}{45^2} + \frac{1}{60^2} = \frac{1}{36^2},$$

a pozostałe składniki należy sprowadzić do wspólnego mianownika 36^2. Nie znam żadnego rozkładu liczby $\frac{1}{2}$ na sumę mniej niż 12 odwrotności kwadratów różnych liczb naturalnych.

Opisane wyżej postępowanie nie daje wzoru (2), gdyż przy jego stosowaniu po składniku $\frac{1}{4^2}$ musiałby być składnik $\frac{1}{5^2}$, ponieważ $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} > \frac{1}{5^2}$. Zauważmy tu jeszcze, że postępowanie, o którym mówiliśmy, może dla liczby wymiernej w doprowadzić do jej rozkładu na większą liczbę składników niż jakiś inny jej rozkład na sumę odwrotności kwadratów różnych liczb naturalnych.

Na przykład dla liczby wymiernej $w = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}$ omówione wyżej postępowanie daje jej rozkład na więcej niż trzy składniki, mianowicie

$$\frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{60^2} + \ldots$$

Podobnie dla liczby $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}$ postępowanie to daje rozkład na więcej niż dwa składniki:

$$\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots$$

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 1. *Z twierdzenia* T *wynika, że jeżeli w jest liczbą wymierną, spełniającą warunki twierdzenia* T, *to liczba w może być na nieskończenie wiele różnych sposobów przedstawiona w postaci* (1), *gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tworzą ciąg rosnący liczb naturalnych.*

Dowód. Przypuśćmy, że liczba wymierna w spełnia warunki twierdzenia T. Wobec $\pi^2 < 12$ mamy $w < 1$ i, w myśl twierdzenia T, istnieje rozkład (1). Wobec $w < 1$ mamy tu oczywiście $x_n > 1$. Gdyby było $x_n = 2$, to, wobec $w < 1$, musiałoby być $n = 1$ oraz $w = \frac{1}{4}$. Lecz wobec wzoru (2) i uwagi, że $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}$, mamy dla liczby $\frac{1}{4}$ jeszcze inne rozwinięcie, mianowicie

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{60^2},$$

gdzie mamy sumę jedenastu składników, z których ostatnim jest $\frac{1}{60^2}$.

Możemy więc zawsze zakładać, że dla liczby w mamy rozwinięcie (1), gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liczbami naturalnymi rosnącymi i gdzie $x_n > 2$.

Ponieważ liczba $\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{(x_n+1)^2}$ jest liczbą wymierną większą od 0 oraz mniejszą od $\frac{1}{4}$, więc, w myśl twierdzenia T, istnieją liczby naturalne $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$, takie że

$$\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{(x_n+1)^2} = \frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \ldots + \frac{1}{y_m^2}. \tag{3}$$

Gdyby było $y_1 \leqslant x_n+1$, mielibyśmy $\frac{1}{y_1^2} \geqslant \frac{1}{(x_n+1)^2}$, co, wobec wzoru (3), daje

$$\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{(x_n+1)^2} \geqslant \frac{1}{(x_n+1)^2}, \quad \text{zatem} \quad (x_n+1)^2 \geqslant 2x_n^2,$$

skąd $x_n+1 \geqslant x_n\sqrt{2}$ oraz $x_n(\sqrt{2}-1) \leqslant 1$, zatem $x_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$, co, wobec całkowitości x_n, daje $x_n \leqslant 2$, wbrew założeniu, że $x_n > 2$.

Mamy więc $y_1 > x_n+1$ i wzory (1) i (3) dają rozwinięcie

$$w = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}^2} + \frac{1}{(x_n+1)^2} + \frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \ldots + \frac{1}{y_m^2}, \tag{3a}$$

gdzie $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n+1 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m$.

Rozwinięcie (3a) ma $n+m > n$ składników. Z każdego więc rozwinięcia (1) liczby wymiernej w, w którym $x_n > 2$, możemy otrzymać

rozwinięcie o większej liczbie składników, spełniające warunki twierdzenia T. Rozwinięć takich jest więc nieskończenie wiele. Udowodniliśmy zatem, że z twierdzenia T wynika twierdzenie 1.

W związku z twierdzeniem 1 zauważmy, że bez pomocy twierdzenia T potrafimy dowieść, że liczba $w = \frac{1}{2}$ daje się na nieskończenie wiele sposobów przedstawić w postaci (1), gdzie x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ są liczbami naturalnymi rosnącymi. Aby tego dowieść, udowodnimy najpierw następujący lemat:

LEMAT. *Jeżeli przy pewnym naturalnym* $n > 1$ *mamy*

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2},$$

gdzie $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ *są liczbami naturalnymi i liczba* x_n *jest parzysta,* $x_n = 2k$, *to*

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{x_1^2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}^2} + \frac{1}{y_1^2} + \ldots + \frac{1}{y_n^2},$$

gdzie y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *są liczbami naturalnymi,* $x_{n-1} < y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, *i liczba* y_n *jest parzysta.*

Dla dowodu wystarczy przyjąć $y_i = kx_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, gdyż

$$\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{k^2 2^2} = \frac{1}{(kx_1)^2} + \frac{1}{(kx_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(kx_n)^2},$$

a $y_n = kx_n = 2k^2$ jest liczbą parzystą, przy czym, wobec $x_1 \geqslant 3$ (gdyż $n > 1$), mamy $x_{n-1} < x_n = 2k < kx_1 = y_1$.

Z rozkładu liczby $\frac{1}{2^2}$ na sumę n składników o żądanych własnościach otrzymujemy więc rozkład liczby $\frac{1}{2^2}$ na sumę $2n-1 > n$ (gdyż $n > 1$) składników o żądanych własnościach. Wobec wzoru (2), z którego wynika rozkład

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{60^2},$$

wynika więc, że liczba $\frac{1}{2^2}$ daje się na nieskończenie wiele sposobów przedstawić w postaci (1), gdzie x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ są liczbami naturalnymi rosnącymi, przy czym $x_1 = 3$. Wobec $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}$ wynika stąd, że liczba $\frac{1}{2}$ daje nieskończenie wiele rozkładów na sumę (1), gdzie x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ są liczbami naturalnymi rosnącymi.

Zauważmy tu jeszcze, że w każdym takim rozkładzie musi być $x_1 = 2$. Istotnie, dla naturalnych $m > 1$ mamy

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(m+k)^2} < \frac{1}{(m-1)m} + \frac{1}{m(m+1)} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(m+k-1)(m+k)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+k} < \frac{1}{m-1},$$

skąd, wobec $1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, mamy

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_2^2} < \frac{1}{x_1 - 1}, \quad \text{zatem} \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{x_1 - 1},$$

skąd $x_1 < 3$, co wobec $x_1 > 1$ daje $x_1 = 2$.

Z wzoru (2) wynika, że może być $x_2 = 3$ (dla $w = \frac{1}{2}$). Opierając się na twierdzeniu T okażemy, że może tu też być $x_2 = 4$. Mamy bowiem $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} = \frac{3}{16}$. Ale

$$\frac{3}{16} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \left(\frac{21}{16} + \frac{1}{9}\right),$$

gdyż $\frac{1}{6}\pi^2 > \frac{3}{16} + \frac{21}{16} + \frac{1}{9} = \frac{28}{18}$, bowiem $\pi^2 > 9\frac{1}{3}$. Lecz $\frac{3}{16} > \frac{1}{5^2}$. Niech m oznacza największą liczbę naturalną taką, że

$$\frac{3}{16} \geqslant \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{m^2}.$$

Mamy więc

$$\frac{3}{16} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}$$

i dla $w = \frac{3}{16} - \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{m^2}\right)$ jest $w < \frac{1}{(m+1)^2}$. Jeżeli $w > 0$, to, w myśl twierdzenia T, istnieją liczby naturalne $y_1, y_2, \ldots, y_s$, takie że $y_1 < y_2 < \ldots < y_s$ oraz

$$w = \frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \ldots + \frac{1}{y_s^2},$$

przy czym, wobec $w < \frac{1}{(m+1)^2}$, jest $y_1 > m+1$ oraz

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \ldots + \frac{1}{y_s^2},$$

gdzie $m < m+1 < y_1 < y_2 < \ldots < y_s$.

Nie odwołując się do twierdzenia T udowodnimy tu jeszcze

TWIERDZENIE 2. *Dla każdej liczby naturalnej* $n > 1$ *równanie*

$$\frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2} \tag{4}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

Dowód. Wystarczy oczywiście dowieść, że równanie (4) ma dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ co najmniej jedno rozwiązanie w różnych liczbach naturalnych.

Dla $n = 2$ twierdzenie nasze jest prawdziwe, gdyż, jak łatwo sprawdzić,

$$\frac{1}{12^2} = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2}. \tag{5}$$

Przypuśćmy teraz, że twierdzenie 2 jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$, że więc istnieją liczby naturalne $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, dla których zachodzi wzór (4).

Niech $y_i = 12x_i$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $y_n = 15x_n$, $y_{n+1} = 20x_n$. Wobec $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ mamy $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n < y_{n+1}$, a wobec wzorów (5) i (4) jest

$$\frac{1}{y_0^2} = \frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \ldots + \frac{1}{y_{n+1}^2}.$$

Twierdzenie 2 jest więc prawdziwe dla liczby $n+1$. Dowód twierdzenia 2 wynika więc przez indukcję.

TWIERDZENIE 3. *Liczba* 1 *nie jest sumą skończonej większej od* 1 *liczby odwrotności kwadratów różnych liczb naturalnych.*

Dowód. Przypuśćmy, że przy pewnym naturalnym $n > 1$ mamy

$$1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2}, \tag{6}$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są różnymi liczbami naturalnymi, wobec $n > 1$, większymi od 1. Możemy więc założyć, że $1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, skąd z łatwością wynika, że $x_k \geqslant k+1$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, zatem wobec wzoru (6):

$$1 \leqslant \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}. \tag{7}$$

Lecz

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

i wzór (7) daje

$$1<\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}<1,$$

co jest niemożliwe.

Twierdzenie 3 zostało więc udowodnione.