ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1964)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Ł. A. KAŁUŻNIN

O języku informacyjnym matematyki*

Ogólnie wiadomo, że oznaczenia odgrywają w matematyce ważną rolę. Umiejętnie wybrana symbolika nie tylko sprzyja rozwiązaniu skomplikowanego zagadnienia matematycznego, ale bez żadnej przesady można powiedzieć, że współczesne dyscypliny matematyczne są wprost nie do pomyślenia bez odpowiedniej symboliki. Na przykład wprowadzenie oznaczeń literowych w początku XVII stulecia przyczyniło się do powstania algebry w dzisiejszym znaczeniu tego słowa (1).

W oparciu o nową literową algebrę mogła szybko rozwinąć się geometria analityczna. Analiza nieskończenie małych, której zalążek można znaleźć w pracach wielu matematyków od XV do XVII wieku, przyjęła postać samodzielnej gałęzi matematyki, zyskując ogólne uznanie dopiero wtedy, gdy Newton, a w szczególności Leibniz, zastosowali do rozwiązywania jej podstawowych zagadnień adekwatną symbolikę (2).

Warto przypomnieć, że nowy rachunek oparty na nowych, głębokich pojęciach i odpowiadających im wygodnych oznaczeniach przekształcił się w ręku wielkich matematyków XVIII w. (bracia Bernoulli, Euler, d'Alembert, Lagrange) w mocny aparat służący do tworzenia nowych teorii matematycznych, zarówno matematyki czystej, jak i stosowanej. Przy tym jest godnym podziwu, jak beztrosko i umiejętnie matematycy tego okresu (w szczególności Euler) posługiwali się nowym

---

* Tłumaczenie ze zbioru artykułów *Прикладная лингвистика и машинный перевод*, Издательство Киевского Университета, 1962, str. 21-29.

(1) Zauważmy, że po dziś dzień dla większości niematematyków „algebra" tym różni się od „arytmetyki", że liczy się w niej na „literach" a nie na „liczbach". Oczywiście matematycy rozróżniają te dyscypliny nie ze względu na tę powierzchowną cechę. Ale należy powiedzieć, że w tym naiwnym sądzie jest pewna część prawdy.

(2) Nie należy tego oczywiście rozumieć dosłownie. Rachunek różniczkowy i całkowy Leibniza i Newtona polega nie tylko (a nawet nie w pierwszym rzędzie) na wprowadzeniu oznaczeń dla pochodnej i całki, ale na określeniu tych nowych pojęć i zbadaniu ich ogólnych i podstawowych własności. Ale dla jasnego i ogólnie przyjętego sformułowania tych własności, dla zastosowania nowych pojęć w praktyce i rozwiązywaniu poszczególnych zagadnień nowe idee nie mogłyby uzyskać należytego rozpowszechnienia. Nawet dla samych autorów mogłyby one nie być zupełnie jasne.

aparatem formalnym. Niejednokrotnie wygląd zewnętrzny wzorów przyczyniał się do odkrywania nieznanych dotąd faktów, które często przyjmowano na wiarę nie troszcząc się o ich dowody. Dopiero znacznie później udało się dać ścisłe podstawy osiągniętym wówczas wynikom i w końcu udowodnić formalne i czysto heurystyczne wnioski. Dziś w związku z niedawnymi badaniami w dziedzinie podstaw i metodologii matematyki stopniowo staje się zrozumiałe, dlaczego niekiedy w matematyce „wzory same myślą". Ostateczny sens wzorów w matematyce pozostaje nadal niewyjaśniony. Warto byłoby poddać zagadnienie rozwoju symboliki matematycznej dokładnemu i dostatecznie szerokiemu badaniu historycznemu. Badanie takie przyczyniłoby się do wyłowienia wielu ciekawych danych o ogólnych prawidłowościach systemów oznaczeń.

Termin „język matematyki" będziemy rozumieli jako zestaw symboli i tekstu słownego w określonym języku, używanych we współczesnej literaturze matematycznej. Zatem w rzeczywistości należałoby mówić o rosyjskim, francuskim, angielskim itd. językach matematycznych; w dalszym ciągu termin „język matematyczny" będziemy używali wtedy, gdy to, o czym będziemy mówili, odnosić się będzie do dowolnego (ale ustalonego) z wymienionych powyżej języków. Tylko w tym przypadku, gdy będziemy chcieli podkreślić jakąś specyficzną cechę jednego z tych języków, dodawać będziemy odpowiedni przymiotnik.

Nawet zupełnie powierzchowne zetknięcie się z literaturą matematyczną wykazuje, że symbole matematyczne i całe wzory przeplatają się w niej z tekstem słownym, przy czym stosunek właściwej symboliki matematycznej do tekstu słownego bywa bardzo różny. Można wskazać wiele prac, prawie całkowicie składających się ze wzorów, między którymi od czasu do czasu występują zwroty w postaci: „skąd" „rzeczywiście", „istotnie", „zatem", „z jednej strony", „z drugiej strony", „wbrew założeniu" itd. Jest też wiele prac, o których, na pierwszy rzut oka, trudno jest nawet powiedzieć, że są pracami matematycznymi. Ich wygląd zewnętrzny przypomina beletrystykę lub też wykład matematyki charakterystyczny dla nauk humanistycznych. Jest również bardzo wiele tekstów matematycznych pośrednich o mniejszej lub większej ilości specyficznej symboliki matematycznej. Bardzo często w wykładzie matematycznym korzysta się z figur geometrycznych, wykresów i schematów, które również należy uznać za część języka matematycznego. Aby jednak nie komplikować zasadniczej problematyki, pozostawimy tę część na uboczu, chociaż przy powstaniu oraz rozwoju symboliki i w ogóle terminologii matematycznej odgrywała ona i nadal odgrywa rolę godną uwagi.

Na pierwszy rzut oka może wydawać się, że symbole i wzory matematyczne (w dalszym ciągu będziemy mówili o nich jako o „części symbolicznej" tekstu matematycznego) z jednej strony, a część „słowna" z drugiej strony, odgrywają zasadniczo różną rolę. Wbrew temu sądowi

(którego matematycy nie przyjmują w tak skrajnej postaci) chciałbym podjąć się obrony tezy przeciwnej. Znaczna część słownego tekstu matematycznego w zasadzie nie różni się od tekstu symbolicznego. W rozwoju historycznym matematyki i po dziś dzień można zaobserwować tendencję do formalizacji i standaryzacji języka matematycznego. Każdy termin i często całe występujące zwroty są w istocie „wzorami". Na obronę tej tezy można podać wiele przekonywających argumentów, z których większość ma charakter historyczny, i to zarówno z dalekiej przeszłości, jak i naszych czasów. Ciekawych danych można zaczerpnąć rozpatrując powstanie symboliki algebraicznej w XVI wieku. Podamy kilka faktów zamieszczonych u Zeuthena w jego *Historii matematyki* XVI *i* XVII *wieku*. W rozdziale „Symbolika algebraiczna" omawia on stopniowe zastępowanie tekstu słownego przyjętym dziś zapisem symbolicznym. Na przykład Cardano, Tartaglia i inni algebraicy XVI wieku równanie, które dziś ma postać $x^3+ax=b$, zapisywali niemal całkowicie słowami, mianowicie:

sześcian	p	pewna ilość „rzeczy"	równa się	„liczbie"
x^3	$+$	ax	$=$	b

W rozwiązaniu x nazywano „rzeczą", ilość „rzeczy" oznaczało to, co dziś zapisujemy literą a, a wielkość b nazywano „liczbą". Znane w Niemczech znaki $+$ i $-$, jak stąd wynika, nie przyjęły się jeszcze we Włoszech, gdzie, wręcz na odwrót, używano p i m będących prostymi skrótami odpowiednich wyrazów (plus i minus) [3]. Na przełomie XVI i XVII wieku Viéte we Francji i Stevin w Holandii coraz częściej zastępowali słowne sformułowania wzorami. Przy tym Viéte jako pierwszy zaczął oznaczać to, co dawniej nazywano „pewną ilością" — literami. Ale i ich oznaczenia były pośrednie między opisem słownym a współczesnymi wzorami.

Na przykład równanie $A^3+3BA=D$ Viéte zapisuje następująco:

A cubus $+$ B planum in $A3$ aequatur D solido.

Symbolika ta staje się niewystarczająca wtedy, gdy sam wykładnik jest dowolny. W takich przypadkach Viéte ograniczał się do mniej określonych oznaczeń, które były zrozumiałymi jedynie w kontekście

B parabola in gradum $A-A$ potestate aequatur Z homogenae

— jest zapisem równania $BA^n-A^{m+k}=Z$ [4].

Współczesną symboliką algebraiczną posługiwał się już Kartezjusz i jemu współcześni; to, że powstała ona ze zwrotów potocznego języka

[3] H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im* XVI *und* XVII *Jahrhundert*, Lipsk 1903.

[4] Ibidem, str. 112.

można zaobserwować i dziś. W rozwoju tym nie było żadnego skoku. Już samo powstanie symboliki algebraicznej, która pozwoliła na uściślenie języka i przekształcenie go w wygodny aparat do myślenia i wyrażania się nie tylko geniuszów matematycznych, ale i bardzo szerokich kręgów, pozwoliło zająć matematyce swoje miejsce w nauce i technice. Tutaj można całkowicie zgodzić się z sądem wypowiedzianym przez Zeuthena o zastosowaniu nowego języka algebry do geometrii analitycznej. W związku z tym powinniśmy zwrócić uwagę na konieczność niezapominania o różnicy pomiędzy ideami, których rozwój referujemy korzystając z przedstawionego u Kartezjusza języka algebry w jego doskonałej postaci, a samym tym językiem. Fakt, że uprzednio notowano te same myśli bez pomocy tego języka, w żaden sposób nie może zmniejszyć naszego podziwu dla niego. Dzięki Kartezjuszowi rozwinął się i zyskał on pełne uznanie; dziś z jego przywilejów może korzystać każdy, kto tylko osiągnie odpowiednie nawyki w stosowaniu go" (5).

Nie będziemy się zatrzymywali nad dalszymi etapami rozwoju języka matematycznego w XVI i XVII wieku, bez względu na ich ważność dla wyjaśnienia znaczenia języka matematyki. Dodamy tylko, że z rozpatrzonego rysu historycznego można zaczerpnąć wiele argumentów przemawiających za wyżej wypowiedzianą tezą i wystarczająco dokładnie wyjaśnić pochodzenie naszej symboliki z języka potocznego. Rozpatrzenie tego na konkretnym materiale wydaje się nam nie tylko ciekawe, ale również i pożyteczne, gdyż pozwoliłoby na krytyczne spojrzenie na symbolikę, do której przywykliśmy. Symbolika ta jest oczywiście doskonałym aparatem badań matematycznych, jeśli porównać ze słownym językiem średniowiecza, jednakowoż instrument ten jest prawdopodobnie daleki od ideału. Tylko nawyki nie pozwalają tego zauważyć. Analiza genezy tego języka pokazałaby wiele przypadkowości naszej symboliki, wyrażających te lub inne „przypadkowe" cechy języka słownego, przypadkowe w tym sensie, że nie wynikające z logiki opisywanych faktów matematycznych, lecz z tradycji mowy i pisma.

Przejdziemy od razu do następnej epoki rozwoju języka matematyki, związanej z powstaniem i rozwojem logiki symbolicznej. Nie będziemy zatrzymywali się nad ogólnym znaczeniem logiki matematycznej dla podstaw i metodologii matematyki; matematycy znają je doskonale, a również i językoznawcy zaczynają je doceniać w coraz większym stopniu. Zatrzymamy się jedynie na związku logiki matematycznej z językiem matematyki. Na szczęście można mówić o tym aspekcie logiki matematycznej, nie tracąc jednocześnie pozostałych; przy tym — z czego zdają sobie sprawę specjaliści — związek z językiem nie jest ubocznym, ale istotnym aspektem logiki.

(5) Ibidem, str. 110.

Inicjatywę do tworzenia logiki matematycznej dała chęć przedstawienia systemu wniosków logicznych jako pewnego rachunku. Każdy rachunek — jak to intuicyjnie wyczuwano już dawno, a ściśle sformułowano stosunkowo niedawno — jest przeróbką systemów symboli, zgodnie z pewnymi ściśle sformułowanymi regułami. Zatem, zagadnienie zbudowania rachunku logicznego już od samego początku było postawione jako problem o specjalnej symbolice dla opisu związków logicznych. Tak, według wszelkiego prawdopodobieństwa, należy rozumieć żądanie Leibniza dotyczące zbudowania ogólnego języka dla logiki — „uniwersalnej charakterystyki". Widział on go zapewne podobnym do oznaczeń algebraicznych, które przyczyniły się do znacznego postępu w rozwoju matematyki. Wyrażenia słowne należałoby zastąpić jednoznacznym i przejrzystym systemem oznaczeń symbolicznych wolnych od przypadkowości i niejasności języka powszedniego. Jak wiadomo, w takiej postaci powstała logika dopiero dwieście lat później na przełomie XIX i XX wieku w pracach znanych logików i matematyków: J. Boole'a, A. de Morgana, P. Poreckiego, G. Fregego, E. Schrödera, L. Couturata, G. Peany, B. Russela, D. Hilberta i innych.

Z punktu widzenia języka matematycznego, a ten punkt widzenia interesuje nas w pierwszym rzędzie, pokazano w zasadzie możliwość jednoznacznego zapisu dowolnej teorii matematycznej, jej pojęć pierwotnych, twierdzeń i dowodów. W pierwszym etapie rozwoju podstawowe wysiłki skierowane były na realizację tego. Peano w swoim „Formulaire mathématique", Whitehead i Russel w swych „Principia mathematicae" i wielu innych autorów pokazało, że możliwy jest wykład matematyki, w którym zupełnie lub prawie zupełnie nie używa się tekstu słownego a wyłącznie specjalnej, wyłącznie do tego celu opracowanej, symboliki. Okazało się przy tym jak i w okresie ujmowania algebry w symbole w XVI i XVII w., że dalsza formalizacja języka matematycznego pochodziła nie z jakichkolwiek nowych zasad, a z uściślenia i standaryzacji zwykłych leksycznych i syntaktycznych środków języka: związki logiczne zastąpiły spójniki, oznaczenie funkcyjne zostało wprowadzone do opisu stosunków między podmiotem a orzeczeniem (w rachunku predykatów), tzw. kwantyfikatory zastąpiły stosowanie słów „wszystkie", „pewne", a w logice modalnej zastąpiono nawet wyrażenia „możliwe", „konieczne", „rozwiązalne" itd. Tu, tak samo jak i poprzednio, możemy podać wiele przykładów przemawiających za tezą, zgodnie z którą słowna forma wykładu matematyki poprzedza stopniowe tworzenie języka formalnie symbolicznego i jest jego podstawą. Należy podkreślić, że symbolika logiki matematycznej, która w bardzo krótkim czasie osiągnęła dużą doskonałość, prawie zupełnie nie jest wykorzystywana w tekstach matematycznych, prócz tych, które dotyczą logicznej struktury teorii matematycznych. Rozważając zagadnienie ważności zbudowania wyspecja-

lizowanego języka matematyki, należy zastanowić się pokrótce nad przyczyną tego zjawiska i postarać się o wyjaśnienie, w jakim stopniu język logiki matematycznej mógłby się przyczynić do budowy owego wyspecjalizowanego języka matematyki. Wydaje mi się, że zasadnicza przyczyna niewielkiego korzystania z symboliki logicznej w zwykłych tekstach matematycznych: w podręcznikach, monografiach i oryginalnych pracach, nie jest zbyt głęboka ani zasadnicza. Do ostatniego okresu logika matematyczna rozwijała się na uboczu podstawowych dróg rozwoju matematyki i znaczna większość matematyków nie znała jej symboliki, a zatem nie mogła ocenić jej zalet i wad. Jak dotąd, nigdzie na świecie (prócz Polski) logika matematyczna nie była przedmiotem obowiązkowym, ani też objęta egzaminem na studiach matematycznych. W ostatnich latach następuje przełom; w związku ze wzrostem znaczenia logiki matematycznej w teorii maszyn i przetwarzania danych rośnie popyt na wiadomości z tej dziedziny, a razem z tym coraz bardziej rozszerza się korzystanie z symboliki logicznej. Doświadczenie pokazuje, że umiejętne wykorzystywanie tej symboliki łącznie z tekstem słownym znacznie zwiększa dokładność wykładu matematycznego. Wydaje się, że można bezbłędnie przepowiedzieć, iż za 10-20 lat pewne elementy symboliki logicznej wejdą na stałe do języka matematycznego. Przy budowie języka informacyjnego matematyki wszystkie osiągnięcia uzyskane przy budowie języków formalnych logiki matematycznej powinny być jak najpełniej wykorzystane. Czyniono i czyni się nadal wiele prób budowy języka informacyjnego matematyki na bazie języków sformalizowanych logiki matematycznej i oczywiście należy kontynuować próby w tym kierunku. Jednocześnie pojawia się pytanie, czy język logiki matematycznej łącznie z formalnym językiem matematyki wystarczy do zbudowania standardowego języka matematycznego? Wydaje się, że na to pytanie należy odpowiedzieć negatywnie, ale nie tylko dlatego, że sformalizowane języki są za ubogie do objęcia „dużych" teorii matematycznych. Nie jest bowiem przypadkiem, że nikt dotąd nie próbował wyłożyć, powiedzmy, teorii równań różniczkowych czy też teorii funkcji analitycznych posługując się wyłącznie logiczną i czysto matematyczną symboliką bez użycia tekstu słownego. Niewątpliwie brakuje tu nowej aparatury w systemie zapisu. Nie na darmo w podstawach i metodologii matematyki rozróżnia się sformalizowane i niesformalizowane teorie matematyczne, przy czym zupełnie dokładnie określa się, co należy rozumieć przez teorię sformalizowaną, a dla wyjaśnienia, co należy rozumieć przez teorię niesformalizowaną, powołuje się na doświadczenie i zwyczaj wykładu matematycznego. Prócz tego (co jest nawet trywialne) i wstęp, i opis języka formalnego możliwy jest jedynie „treściowo", a nie formalnie. Sądzimy, że tego nie można uniknąć. Podobnie nie określa się nieformalnego, „treściowego" wykładu, ale powołuje się na indywidualne i ogólne doświadczenie nawet

w tak „formalnej" nauce, jak matematyka. Dlatego korzystanie z tekstu słownego w matematyce w takiej lub innej postaci jest niezbędne. Oto co obserwujemy: część słowna tekstów matematycznych ma wyraźną tendencję do standaryzacji. Fakt ten łatwo sprawdzić, jeśli przejrzymy, nawet powierzchownie, dostatecznie dużo współczesnych tekstów matematycznych, w szczególności monografii i czasopism. Oczywiście stopień standaryzacji u różnych autorów jest bardzo różny: znany jest wielu matematykom styl niemieckiego specjalisty z teorii liczb, E. Landaua; duże osiągnięcie w kierunku zwartości i jednocześnie standaryzacji tekstu słownego uzyskało wielu amerykańskich matematyków, szczególnie algebraików; w końcu, prawie zupełnie symboliczną postać otrzymał styl wykładu francuskiej, kapitalnej pracy N. Bourbakiego „Elementy matematyki".

Co należy rozumieć przez standaryzację języka matematycznego? Uważamy za przedwczesne podawanie ostatecznej definicji obserwowanego zjawiska; powinna ona być wynikiem dokładnej analizy współczesnego języka matematycznego. Wskażemy tylko na fakt, że ta standaryzacja opiera się przy pierwszym powierzchownym spojrzeniu na tym, że leksyka języka matematycznego (mówimy przy tym nie o specyficznych terminach matematycznych, ale o całym pozostałym tekście słownym) jest bardzo uboga i jednocześnie mniej mglista; ustalamy pewną liczbę operatorów, które stabilizujemy i stosujemy jako nierozłączne formuły. Na przykład: „rozważmy", „wykażemy niewprost", „wykazane twierdzenie oznacza", „w tym celu wystarczy wykazać", „nie ograniczając ogólności załóżmy" itd. Niekiedy odnosi się wrażenie, że cały tekst słowny może być zapisany przy pomocy nawet niezbyt długiego ciągu takich gotowych formuł. Proponujemy zatem:

1. Przeprowadzić dokładną statystyczną i logiczną analizę języka współczesnych słownych tekstów matematycznych. Ujawnić jego tendencję do standaryzacji; uściślić znaczenie semantyczne formuł słownych i reguły posługiwania się nimi.

2. Na podstawie tej analizy zbudować wyspecjalizowany, uproszczony język matematyczny (z początku rosyjski), który w połączeniu ze zwykłą symboliką matematyczną z jednej i środkami symbolicznymi logiki matematycznej z drugiej strony, wystarczyłby do wyłożenia wyników współczesnych badań matematycznych. Uproszczenie języka w pierwszym etapie powinno polegać na wyborze i ustaleniu niezbyt bogatego słownika; na ustaleniu dokładnych reguł wprowadzania nowych wyspecjalizowanych terminów; na uproszczeniu gramatyki w sensie jej zubożenia. To ostatnie powinno polegać na wyeliminowaniu wyjątków gramatycznych, a z morfologicznych i syntaktycznych reguł pozostawić tylko te, które istotnie są niezbędne do przekazywania myśli matematycznej. Aby się przekonać, że nie jest to zbyt wiele, należy zauważyć, że bar-

dzo pobieżna znajomość gramatyki języka obcego wystarcza do zrozumienia prac nim napisanych. W końcu sensowne jest wprowadzenie stałych oznaczeń symbolicznych do przekazywania formuł słownych (zwrotów).

3. Jako proste zastosowanie praktyczne takiego języka można podać:

a) przekład automatyczny;

b) zapamiętywanie, poszukiwanie i przeróbka informacji naukowych z dziedziny matematyki;

c) zapis informacji do pracy uniwersalnych maszyn rachunkowych (postawienie zagadnienia, program).

Nie należy wątpić, że analiza języka matematycznego, a również budowa i doświadczenia uzyskane przy korzystaniu z niego wywołają wiele nowych zjawisk teoretycznych, dotyczących struktury matematyki i myślenia matematycznego, które są dotąd zaciemniane przez słowną formę wykładu, podobnie jak to miało miejsce w algebrze przed wprowadzeniem oznaczeń algebraicznych, czy też w logice przed opracowaniem systemu oznaczeń logicznych. Warto byłoby zastanowić się nad pewną charakterystyczną cechą wykładu matematycznego, którą łatwo zauważyć przy biegłej znajomości postaci słownych tekstów matematycznych. Niejednokrotnie wskazywano na zasadniczą różnicę pomiędzy zwykłymi językami, a językami sformalizowanymi i kodami. Jedna z podstawowych różnic polega na tym, że w językach formalnych w przeciwieństwie do języków zwykłych „znaczenie" symboli i ich połączeń jest raz na zawsze ustalone i nie zmienia się w trakcie korzystania z nich. (Jeśli w języku formalnym zmienić regułę posługiwania się chociażby jednym tylko symbolem, to w myśl samego określenia mamy już do czynienia z innym językiem formalnym.) W języku żywym, wręcz przeciwnie, oddzielne słowa i całe zwroty mają same przez się nieścisłe znaczenie, zmieniające się przy korzystaniu zgodnie z dostatecznie złożonymi prawidłościami. Należy zauważyć, że ta charakterystyczna cecha języka potocznego zachowuje się i przy wykorzystywaniu go w tekstach matematycznych. Dlatego wystarczająco duża część słownego sformułowania tekstu matematycznego polega w wielu przypadkach na ustaleniu znaczeń lub innych terminów i wyrażeń, które zachowują swą moc w danej pracy lub nawet tylko w jej części. Na takie czasowe ustalenie wskazują słowne formuły postaci: „w dalszym ciągu przez... będziemy rozumieli", „gdzie... oznacza", „w całej pracy będziemy korzystali", itd. Możliwość takiej czasowej zmiany języka jest niewątpliwie bardzo ważna dla wykładu matematyki. Jednocześnie z pozostałymi problemami języka to zjawisko wymaga szczegółowego wyjaśnienia.