ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1964)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zadania

Gwiazdką * oznaczane są te zadania, których rozwiązanie nie jest znane autorowi ani redakcji, albo znane jest tylko rozwiązanie częściowe. Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, uwagi o zadaniach, nowe zadania itp.) należy nadsyłać pod adresem: Andrzej Lelek, Wrocław 2, Plac Zgody 11/20. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane.

66. Dowieść, że jeśli wszystkie 2^n wierzchołków kostki n-wymiarowej zostaną pomalowane dwoma kolorami: 2^{n-1} na czerwono i 2^{n-1} na niebiesko, to liczba krawędzi czerwono-niebieskich będzie co najmniej 2^{n-1}.

A. N. Kołmogorow (Moskwa)

67. Dla jakich liczb naturalnych $m > 1$ istnieje wielomian $f(x)$ o współczynnikach całkowitych taki, że $f(x)$ dla pewnych liczb całkowitych x daje przy dzieleniu przez m resztę 0, dla pewnych całkowitych x resztę 1, a dla wszelkich całkowitych x bądź resztę 0, bądź resztę 1?

W. Sierpiński (Warszawa)

68. Sprawdzić tożsamość

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_j\leqslant n}(x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_j})^k=\begin{cases}0 & \text{dla } k<n,\\ x_1x_2\ldots x_n & \text{dla } k=n.\end{cases}$$

A. Pełczyński (Warszawa)

69. Znaleźć dwie funkcje ciągłe $f(x)$ i $g(x)$ takie, że $g(x)$ nie jest *przesunięciem* $f(x)$, tj. dla żadnego T nie zachodzi tożsamość

$$f(x+T)-g(x)\equiv 0,$$

ale dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje T spełniające nierówność

$$|f(x+T)-g(x)|<\varepsilon$$

dla każdego x. Zbudować też funkcje ciągłe $f(x)$ i $g(x)$ takie, że $g(x)$ nie jest przesunięciem $f(x)$, ale dla każdej pary liczb $a<b$ istnieje T spełniające równość

$$f(x+T)-g(x)=0$$

dla każdego x z przedziału $a\leqslant x\leqslant b$.

A. W. Archangielski (Moskwa)

70. Dowieść, że jeśli $f(x)$ jest funkcją ciągłą dodatnią z okresem 1, to

$$\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{f(x+a)} \geqslant 1.$$

W. I. Arnold (Moskwa)

71. Czy może być tak, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ jest zbieżny, ale nie jednostajnie?

W. I. Arnold (Moskwa)

72. Wiadomo ([1]), że jeśli wyrazy a_n szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są nieujemne i tworzą ciąg nierosnący, to $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Wykazać, że ciągu $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ nie można tu zastąpić żadnym ciągiem liczb $\{a_n\}$ takim, że $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

W. I. Arnold (Moskwa)

73. Udowodnić, że dla dowolnego ciągu liczb całkowitych k_1, l_1, k_2, l_2, ..., k_n, l_n istnieją macierze ortogonalne A i B takie, że

$$A^{k_1}B^{l_1}A^{k_2}B^{l_2} \ldots A^{k_n}B^{l_n} \neq \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

W. I. Arnold (Moskwa)

74. Przecięcie elipsoidy o półosiach $A \geqslant B \geqslant C > 0$ płaszczyzną przechodzącą przez jej środek jest elipsą o półosiach $a \geqslant b > 0$. Dowieść, że

$$A \geqslant a \geqslant B \geqslant b \geqslant C.$$

W. I. Arnold (Moskwa)

75*. Jeśli kula bilardowa porusza się po stole bilardowym w kształcie koła, odbijając się od jego ścian według prawa, że kąt padania jest równy kątowi odbicia, to oczywiście istnieje zawsze koło, wewnątrz którego kula nigdy się nie znajdzie. Jakie inne stoły bilardowe mają tę samą własność? W szczególności, czy mają ją wszystkie stoły prostokątne i eliptyczne?

W. I. Arnold (Moskwa)

([1]) Б. П. Демидович, *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, Moskwa 1958, str. 61 i 213.

76. Jeśli ciągłe przekształcenie koła na siebie jest tożsamością na brzegu koła, a jego złożenie z samym sobą jest tożsamością na całym kole, to przekształcenie jest tożsamością na całym kole.

W. I. Arnold (Moskwa)

77. Niech będzie dane koło K' na płaszczyźnie i ciąg punktów a'_n wewnątrz K'. Czy zawsze można dobrać koło K tak, aby przez inwersję względem K koło K' przeszło w koło K'', a punkty a'_n w punkty a''_n, odpowiednio, o tej własności, że na każdym promieniu koła K'' leży co najwyżej jeden punkt a''_n i wszystkie punkty a''_n są zawarte wewnątrz koła K'' $(n = 1, 2, \ldots)$?

W. I. Arnold (Moskwa)

78. Dowieść, że jeśli w obszarze o polu 1 znajduje się pięć obszarów, z których każdy ma pole nie mniejsze niż $\frac{1}{2}$, to część wspólna jakichś dwu z tych pięciu obszarów ma pole nie mniejsze niż $\frac{1}{5}$.

W. I. Arnold (Moskwa)

79. Banknot został złożony pewną ilość razy w ten sposób, że za każdym razem składano całą figurę, albo już istniejące zagięcia. Czy obwód tak otrzymanej figury płaskiej może być większy niż obwód banknotu?

W. I. Arnold (Moskwa)

80*. Niech $N(n)$ będzie liczbą łamanych o długości n i początku w punkcie $(0, 0)$, utworzonych z odcinków prostych $x = i$ i $y = j$, gdzie i i j są liczbami całkowitymi. Liczymy tylko łamane, które nie przecinają się same ze sobą. Wykazać, że dla granic

$$k_1 = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{N(n)}, \qquad k_2 = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{N(n)}$$

zachodzą nierówności

$$2{,}6 < k_1 \leqslant k_2 < 2{,}75.$$

Czy $k_1 = k_2 = e$?

W. I. Arnold (Moskwa)

81. Na zbiorze liczb całkowitych zadana jest funkcja $f(i)$ taka, że

$$f(i) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} P_{j-i} f(j),$$

gdzie $P_k > 0$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_k = 1$.

Udowodnić, że każda taka funkcja $f(i)$ jest albo stała, albo nieograniczona. Znaleźć wszystkie dodatnie funkcje tego typu.

E. B. Dynkin (Moskwa)

82. Niech A i B będą macierzami stopnia n i $C = AB - BA$. Wykazać, że jeśli $AC = CA$ lub $BC = CB$, to $C^n = 0$.

E. A. Gorin (Moskwa)

83. Niech $f(z_1, z_2)$ i $g(z_1, z_2)$ będą wielomianami dwóch zmiennych zespolonych z_1 i z_2, takimi że

$$|f(z_1, z_2)| \leqslant |g(z_1, z_2)|$$

dla każdego z_1 i z_2. Dowieść, że wielomiany f i g są proporcjonalne, czyli

$$f(z_1, z_2) \equiv a g(z_1, z_2).$$

E. A. Gorin (Moskwa)

84. Dowieść, że jeśli $P(x, y)$ jest wielomianem, który w kole $x^2 + y^2 \leqslant 1$ zeruje się tylko w punkcie $(0, 0)$, to dla punktów z tego koła zachodzi nierówność

$$|P(x, y)| \geqslant a(x^2 + y^2)^h,$$

gdzie $a > 0$ i $h > 0$.

E. A. Gorin (Moskwa)

85. Niech $P(x, y)$ i $g(x, y)$ będą wielomianami rzeczywistymi takimi, że jeśli $g(x_n, y_n) \to \infty$, to $P(x_n, y_n) \to \infty$ dla dowolnego ciągu $\{(x_n, y_n)\}$. Dowieść, że

$$|P(x, y)| \geqslant a|g(x, y)|^h - b,$$

gdzie a, b i h są pewnymi liczbami dodatnimi. Rozpatrzyć przypadek szczególny

$$g(x, y) = x^2 + y^2.$$

E. A. Gorin (Moskwa)

86. Niech będzie danych n wieloboków $F_1, \ldots, F_n$ położonych na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z tak, że każde dwa z nich można oddzielić prostą, mającą dodatnią odległość od wszystkich wieloboków $F_1, \ldots, F_n$. Niech $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ będą ustalonymi wielomianami. Zbudować ciąg wielomianów $g_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ taki, że $g_k(z)$ na każdym F_j $(j = 1, \ldots, n)$ jest jednostajnie zbieżne do wielomianu $f_j(z)$.

E. A. Gorin (Moskwa)

87. Znaleźć szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ jest rozbieżny. Udowodnić, że dla dowolnego podzbioru S zbioru liczb nieparzystych dodatnich k istnieje szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$ jest zbieżny dla $k \in S$ i rozbieżny dla $k \notin S$.

A. A. Kiriłłow (Moskwa)

88. Na sferze $x^2+y^2+z^2 = 1$ dana jest funkcja ciągła rzeczywista $f(x, y, z)$. Dowieść, że jeśli całka tej funkcji na każdym wielkim kole sfery jest równa zeru, to

$$f(x, y, z) = -f(-x, -y, -z).$$

A. A. Kiriłłow (Moskwa)

89. Niech będą dane cztery liczby a_0, b_0, c_0, d_0. Określamy ciągi $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $\{c_i\}$, $\{d_i\}$, jak następuje:

$$a_{n+1} = |a_n - b_n|, \quad b_{n+1} = |b_n - c_n|,$$
$$c_{n+1} = |c_n - d_n|, \quad d_{n+1} = |d_n - a_n|,$$

dla $n = 0, 1, \ldots$ Dowieść, że jeśli a_0, b_0, c_0, d_0 są liczbami całkowitymi, to istnieje liczba m taka, że $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ dla $n > m$. Dla jakich czwórek liczb a_0, b_0, c_0, d_0 wśród liczb a_i, b_i, c_i, d_i, dla każdego $i = 1, 2, \ldots$ z osobna, znajdzie się co najmniej jedna liczba różna od zera?

A. A. Kiriłłow (Moskwa)

90. Niech R będzie rodziną wszystkich funkcji wielu zmiennych, których argumenty i wartości są liczbami naturalnymi. Dowieść, że każdy podzbiór przeliczalny rodziny R zawiera się w takim podzbiorze P, że P powstaje z jednej funkcji dwóch zmiennych drogą kolejnych superpozycji.

O. B. Łupanow (Moskwa)

91. Dana jest macierz $[a_{ij}]$ stopnia n, złożona z liczb nieujemnych. Dla każdej permutacji

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

przyjmujemy

$$a(T) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki_k}.$$

Niech $A = \max_T a(T)$.

Dowieść, że jeśli dla każdego elementu a_{ij} istnieje permutacja T_{ij}, przeprowadzająca i w j oraz taka, że $a(T_{ij}) = A$, to równość

$$a(T) = A$$

zachodzi dla każdej permutacji T.

W. M. Tichomirow (Moskwa)

92. Niech $f(x, y, z)$ będzie funkcją ciągłą rzeczywistą na sferze $x^2+y^2+z^2 = 1$, spełniającą warunek antysymetrii

$$f(x, y, z) = -f(-x, -y, -z).$$

Dowieść, że istnieje zbiór spójny, centralnie symetryczny na sferze, na którym funkcja f przyjmuje wartość zero. (2)

W. M. Tichomirow (Moskwa)

93. Udowodnić, że jeśli C jest continuum leżącym w hiperpłaszczyźnie $x_1 = 0$ przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej lub kostki Hilberta, to w półprzestrzeni $x_1 > 0$ istnieje obraz topologiczny L półprostej, dla którego $C = \bar{L}-L$.

R. Duda (Wrocław)

94. Niech C będzie zbiorem Cantora na odcinku jednostkowym osi odciętych i $L(c)$ odcinkiem prostoliniowym łączącym punkt $c \in C$ z punktem $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dowieść, że jeśli X jest podzbiorem spójnym zbioru

$$\bigcup_{c \in C} L(c),$$

to każdy odcinek $L(c)$ zawiera co najwyżej jedną quasi-składową zbioru $X-\{a\}$.

R. Duda (Wrocław)

95. Dowieść, że każda figura płaska domknięta wypukła, o stałej szerokości 1, zawiera figurę F, będącą przecięciem sześciu kół o promieniach 1 i środkach umieszczonych w wierzchołkach sześciokąta foremnego o boku $1/\sqrt{3}$. Nie istnieje przy tym żadna figura F' większa od F (tj. taka, że $F' \neq F \subset F'$) i mająca środek symetrii, której przysługiwałaby ta sama własność.

W. Holsztyński (Warszawa)

(2) Por. zadanie 33 (Wiadom. Mat. 4 (1961), str. 296).

96. Niech $\{a_1, \ldots, a_{2n+1}\}$ będzie układem $2n+1$ różnych punktów przestrzeni X metryzowalnej ośrodkowej n-wymiarowej. Dowieść, iż w X można wprowadzić metrykę ϱ taką, że jeśli $b, b' \in X$ i $b \neq b'$, to istnieje $i = 1, \ldots, 2n+1$, dla którego

$$\varrho(a_i, b) \neq \varrho(a_i, b').$$

Wykazać ponadto, że metryka ϱ zależy istotnie od układu punktów $\{a_1, \ldots, a_{2n+1}\}$. Mianowicie jeśli Z jest dowolną przestrzenią metryzowalną zwartą n-wymiarową, gdzie $n > 1$, to dla każdej metryki ϱ w przestrzeni Z istnieje w Z podzbiór $(2n+1)$-punktowy A i punkty $b \neq b'$ takie, że $\varrho(a, b) = \varrho(a, b')$ dla każdego $a \in A$.

W. Holsztyński (Warszawa)

97. Czy istnieje ciąg $\{f_n(t)\}$ funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0, 1]$ taki, że nie istnieje funkcja $g(t)$ pierwszej klasy Baire'a, spełniająca nierówności

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(t) \leqslant g(t) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} f_n(t)$$

dla $0 \leqslant t \leqslant 1$?

R. Jajte (Łódź)

98*. Niech $h_0(x)$ i $h_1(x)$ będą homeomorfizmami odcinka $[0, 1]$ na siebie. Czy dla każdego $x \in [0, 1]$ i prawie każdego t z przedziału $0 < t < 1$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h_{t_k} \ldots h_{t_2} h_{t_1}(x),$$

gdzie $t = (0, t_1 t_2 \ldots)_2$ jest rozwinięciem dwójkowym liczby t?

R. Jajte (Łódź)

99. Niech M będzie przestrzenią metryczną funkcji $f(t)$ określonych na odcinku $[0, 1]$, o wartościach zespolonych, takich że

$$f(0) \neq 0, \quad |f(t)| \leqslant 1, \quad |f(t_2) - f(t_1)| \leqslant t_2 - t_1$$

dla $t, t_1, t_2 \in [0, 1]$ i $t_1 \leqslant t_2$, oraz odległość ϱ jest określona wzorem

$$\varrho(f_1, f_2) = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f_1(t) - f_2(t)|.$$

Udowodnić, że przyporządkowanie każdej funkcji $f(t)$ z przestrzeni M argumentu liczby $f(t_0)$, gdzie t_0 jest kresem dolnym zbioru liczb t z odcinka $[0,1]$, spełniających warunek $|f(t)| = t$, stanowi przekształcenie ciągłe przestrzeni M w koło.

Jan Mycielski (Wrocław)

100. Dane są ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ liczb naturalnych, z których drugi jest rozbieżny do nieskończoności. Dowieść istnienia permutacji π zbioru liczb naturalnych takiej, że dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ zachodzi nierówność

$$\pi^{-1}(a_{\pi(n)}) \leqslant n + b_n.$$

Jan Mycielski (Wrocław)