ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1963)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

H. STEINHAUS (Wrocław)

Pogadanka

(trochę historyczna)

Jest w historii matematyki wieku XIX data przełomowa: sformułowanie definicji funkcji ciągłej. Zagadnienie ciągłości trapiło oczywiście już starożytnych, narzucone im przez geometrię i kinematykę, ale dziwnym kaprysem ewolucji pojęć matematycznych wydaje się dziś fakt, że rachunek różniczkowy i całkowy wyprzedził o całe stulecie tę definicję funkcji ciągłej, którą posługują się współcześni matematycy — za jej autora uważano powszechnie Cauchy'ego na podstawie jego dzieł wydrukowanych w latach 1821, 1823 i 1829. Nie te daty jednak, lecz rok 1817 należy uznać za przełomowy, bo wtedy ukazała się w Pradze rozprawa pod tytułem „*Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*" — dzisiejsi badacze ewolucji podstaw rachunku różniczkowego uważają ją za początek tej ścisłości, która o całą generację później zapanowała w europejskich centrach naukowych dzięki wpływowi Weierstrassa. Autorem rozprawy był Bernhard Bolzano, filozof i matematyk. Jego ojciec pochodził z północnych Włoch, a on sam spędził całe życie w Pradze — predykat „Bohemian" używany przez angielskie encyklopedie trudno uznać za dowód czeskości w dzisiejszym znaczeniu tego słowa, tym bardziej, że Bolzano pisał tylko po niemiecku... czy nie należałoby go nazwać Austriakiem?

Bolzano wyprzedził swoją epokę także jako autor przykładu funkcji wszędzie ciągłej, a jednak wszędzie pozbawionej pochodnej; zwykle przypisuje się Weierstrassowi pierwszeństwo tego odkrycia — w połowie XIX wieku mało kto słyszał o tym księdzu, który nie miał tytułów akademickich i nie ogłaszał swoich prac w Crelle's Journal — dopiero H. Hankel po 50 latach wydobył na światło dzienne nazwisko Bolzany przysypane prochem zapomnienia — dziś jedna z ulic śródmieścia praskiego nosi tę nazwę, choć niewielu przechodniom ma ona coś do powiedzenia. W Polsce wiedział o tych faktach historycznych Samuel Dickstein, który w r. 1899 ogłosił przyczynek do historii pryncypiów rachunku infinitezymalnego.

Tytuł rozprawy z r. 1817, podany wyżej w wersji oryginalnej, zawiera skrócony tekst twierdzenia: *Jeżeli funkcja ciągła przyjmuje na jednym końcu przedziału ciągłości wartość ujemną, a na drugim dodatnią, to musi w jakimś punkcie tego przedziału przyjąć wartość zerową.* W rozprawie Bolzano udowodnił to twierdzenie kompletnie dzięki ścisłej definicji ciągłości, którą sam sformułował. Toteż bardzo mi trudno zrozumieć, dlaczego niektórzy matematycy polscy mówią o funkcji, która przyjmuje w przedziale wszystkie wartości leżące między jej wartościami skrajnymi, że *ma własność Darboux* — przecież Gaston Darboux urodził się o wiele lat po dacie praskiej rozprawy, a dopiero z końcem XIX wieku ogłosił pracę, w której wykazał, że pochodna $f'(x)$ dowolnej funkcji różniczkowalnej ma też własność przyjmowania wartości pośrednich ... oczywiście podaje twierdzenie klasyczne o funkcji ciągłej na wstępie jako powszechnie znane. Wobec tego można streścić pracę Darboux jako odkrycie, że pochodna też ma *własność Bolzany*, który pierwszy wykazał ją ściśle dla funkcyj ciągłych — nie zapominajmy jednak, że intuicyjne przeświadczenie o prawdziwości tytułowej tezy rozprawy praskiej mieli wszyscy wybitni matematycy XVIII wieku.

Z twierdzenia Bolzany wynikają łatwo różne konsekwencje, na przykład taka: *Gdy dwie funkcje* $f(x)$, $g(x)$ *są ciągłe w* $\langle a, b\rangle$ *i spełniają warunki* $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$, *to istnieje w* $\langle a, b\rangle$ *taki punkt* c, *że* $f(c) = g(c)$. Chcemy tu podać następujący wariant tego twierdzenia:

Twierdzenie I. Założenia: *Funkcja* $f(x)$ *jest ciągła w* $\langle a, b\rangle$; *funkcja* $g(x)$ *jest niemalejąca w* $\langle a, b\rangle$; $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$. Teza: *Istnieje w* $\langle a, b\rangle$ *taki punkt* c, *że* $f(c) = g(c)$ — *co więcej, można go dobrać tak, żeby funkcja* $g(x)$ *była ciągła w* c.

Jak widać, tw. I jest modyfikacją teorematu podanego o kilka wierszy wyżej: zamiast ciągłości $g(x)$ występuje monotoniczność.

Dowód.

1) Wobec $f(b) - g(b) > 0$ i ciągłości $f(x)$ w b istnieje takie h dodatnie i mniejsze od $b - a$, że w całym przedziale $\langle b-h, b\rangle$ jest $f(x) - g(b) \geqslant 0$; gdy uwzględnimy to, że $g(b)$ jest maksymalną wartością funkcji g w $\langle a, b\rangle$, ostatnia nierówność da $f(x) \geqslant g(x)$ w przedziale $\langle b-h, b\rangle$.

2) Wiadomo z założenia, że nierówność $f(x) \geqslant g(x)$ nie sprawdza się w $x = a$; z 1) wynika, że sprawdza się w $\langle b-h, b\rangle$. Wobec tego można podzielić punkty x przedziału $\langle a, b\rangle$ na dwa zbiory: Z_1 obejmuje takie x, że nierówność $f \geqslant g$ sprawdza się wszędzie od x do b; Z_2 obejmuje pozostałe punkty przedziału $\langle a, b\rangle$. Wiadomo, że punkt $b-h$ należy do Z_1, a punkt a do Z_2; jest też jasne, że wszystkie punkty zbioru Z_1 leżą na prawo od wszystkich punktów zbioru Z_2. Istnieje takie k dodatnie, że dla wszystkich x przedziału $\langle a, a+k\rangle$ zachodzi nierówność $f(x) < g(x)$ — to wynika z założeń tw. I w sposób podobny do rozumowania 1). To wszystko

wykazuje istnienie takiego punktu c wewnątrz (a, b), że wszystkie x na prawo od c należą do Z_1, a wszystkie x leżące na lewo od c do Z_2. Teraz musimy zbadać, czy tak określony punkt c sprawdza tezę tw. I.

3) Rozpatrzymy trzy możliwości: α) funkcja $g(x)$ jest ciągła w c; β) funkcja $g(x)$ jest nieciągła w c i $g(c) = g(c+0)$; γ) funkcja $g(x)$ jest nieciągła w c i jest $g(c) < g(c+0)$; innych możliwości nie ma. W przypadku α różnica $d(x) = f(x) - g(x)$ jest ciągła w c, nieujemna na prawo od c i niedodatnia na lewo od c, więc $d(c) = 0, f(c) = g(c)$. W przypadku β jest $g(c-0) < g(c)$, ale $d(x)$ jest wtedy prawostronnie ciągła w c, a więc $d(c) \geqslant 0$; wobec $g(c-0) < g(c)$ jest $g(x) < f(c)$ dla $x < c$, a więc $d(x) > 0$ w przedziale $\langle c-j, c)$ przy dostatecznie małym, dodatnim j. To implikuje $d(x) \geqslant 0$ w przedziale $\langle c-j, b\rangle$, wbrew definicji punktu c. W przypadku γ mamy $g(c) < g(c+0) \leqslant f(c+0) = f(c)$, a więc $d(c) > 0$, co, w myśl 1), prowadzi do zaliczenia do Z_1 punktu $c-j$, wbrew definicji punktu c. Okazuje się, że tylko przypadek α jest możliwy, a w tym przypadku sprawdza się teza twierdzenia I, co było do okazania.

Zastosujemy twierdzenie I do pewnego zagadnienia dotyczącego liczby punktów kratowych w kole. Mamy na myśli koło o równaniu $u^2+v^2 = n$, to jest koło, którego środek leży w początku układu prostokątnego osi u, v, a którego promień $r = \sqrt{n}$ jest dowolną liczbą dodatnią; *kratowymi* nazywamy punkty o całkowitych współrzędnych u, v. Chcemy wykazać, że *jest taki ciąg kół o promieniach* r_m, *że* $\lim_{m\to\infty} r_m = \infty$ *i że dla każdego koła tego ciągu liczba punktów kratowych objętych kołem jest równa jego polu.*

Nazwijmy $L(n)$ liczbę punktów kratowych objętych kołem $u^2+v^2 = n$. Elementarny wywód — można go znaleźć np. w *Teorii liczb* Sierpińskiego (wyd. I, 1950, str. 86) — prowadzi do wzoru

$$L(n) = 1+4\sum_{R=0}^{E\sqrt{n}} \sqrt{n-k^2} \tag{1}$$

(przy czym symbol Eq oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą liczby q). Do elementarnej teorii liczb należy także „tożsamość Liouville'a" (por. § 6 cytowanej książki, str. 399/400), która pozwala przekształcić prawą stronę wzoru (1) i nadać mu postać

$$L(n) = 1+4\left\{E\frac{n}{1} - E\frac{n}{3} + E\frac{n}{5} \ldots \pm \ldots\right\}, \tag{2}$$

przy czym suma po prawej stronie wzoru (2) jest tylko pozornie nieskończona, bo wyrazy $E\,\dfrac{n}{k}$ są zerami dla k przewyższających n. Nadajmy liczbie n postać $1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2m+1)$; m jest liczbą naturalną. Osobno

potraktujemy (2) w przypadku parzystego m i nieparzystego m. W obu przypadkach możemy napisać zamiast (2)

$$L(n) = 1+4n\left\{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\pm\frac{1}{n}\right\}, \tag{3}$$

przy czym dla parzystego m obowiązuje znak $+$, dla nieparzystego znak $-$. Wyrażenie $\{\ \}$ w (3) jest sumą częściową szeregu Leibniza; suma całego szeregu jest $\pi/4$. Wobec tego mamy

$$\begin{aligned} &L(n) > 1+n\pi \quad \text{dla parzystego } m \quad \text{(przypadek a)},\\ &L(n) < 1+n\pi \quad \text{dla nieparzystego } m \quad \text{(przypadek b)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Widzimy, że w przypadku a liczba punktów kratowych objętych kołem jest większa od pola tego koła — odnosi się to do wszystkich kół o promieniu $1\cdot3\cdot5\ldots(4s+1)$, gdzie s jest dowolną liczbą naturalną.

W przypadku b uciekniemy się do wzoru (2) i zastąpimy w nim n przez $n' = n+\frac{1}{3}$. Teraz $n = 1\cdot3\cdot5\ldots(4s+1)(4s+3)$. Widać od razu, że będzie $L(n') = L(n)$, bo dodanie $\frac{1}{3}$ do n nie zmieni wartości wyrazów po prawej stronie (2), ale pole koła wzrośnie o $(n'-n)\pi = \pi/3 > 1$. Stąd wynika $L(n') = L(n) < 1+n\pi < n'\pi$.

Streśćmy rezultaty uzyskane przed chwilą: Dla $x = 1\cdot3\cdot5\ldots(4s+1)$ jest $L(x) > x\pi$; dla $x = 1\cdot3\cdot5\ldots(4s+3)+\frac{1}{3}$ jest $L(x) < x\pi$; s jest dowolną liczbą naturalną. Funkcja πx przedstawia pole koła o promieniu $\sqrt{x}$ — jest to oczywiście funkcja $f(x)$ ciągła w przedziale $0 \leqslant x < \infty$, a więc także w przedziale $\langle a, b\rangle$, gdzie

$$a = 1\cdot3\cdot5\ldots(4s+1), \qquad b = \tfrac{1}{3}+1\cdot3\cdot5\ldots(4s+3). \tag{5}$$

Funkcja $L(x)$ przedstawia liczbę punktów kratowych leżących w kole o promieniu $\sqrt{x}$ (przy czym wlicza się w to punkty leżące na kole) — jest to oczywiście funkcja niemalejąca w przedziale $\langle 0, \infty)$, a więc także w przedziale $\langle a, b\rangle$. Nazwijmy ją $g(x)$, a będziemy mogli napisać $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$. Ponieważ funkcje f, g tutaj określone oraz przedział $\langle a, b\rangle$ określony w (5) spełniają założenia tw. I, więc muszą spełniać jego tezę: istnieje między a i b punkt c, w którym $f = g$ i w którym funkcja $g(x)$ jest ciągła. Innymi słowy:

TWIERDZENIE II. Założenia: *Liczba s jest naturalna.* Teza: *Istnieje w przedziale* (5) $\langle a, b\rangle$ *taka liczba c, że koło o promieniu $\sqrt{c}$ obejmuje tyle punktów kratowych, ile wynosi jego pole.*

Można by zakwestionować to twierdzenie o tyle, że sztuczne wydaje się zaliczanie punktów leżących na kole do punktów leżących w kole — otóż ta kwestia upada dzięki temu, że równość „pole = liczba punktów kratowych" nie może nigdy być spełniona przez koło $u^2+v^2 = r^2$ prze-

chodzące przez jakikolwiek punkt kratowy, gdyż wtedy r^2 jest liczbą całkowitą, a więc pole $r^2\pi$ jest liczbą niewymierną, a liczba punktów kratowych całkowita.

Nazwijmy *osobliwymi* takie promienie r, że pole koła $u^2+v^2 = r^2$ jest równe liczbie punktów kratowych leżących wewnątrz koła. Jeżeli uporządkujemy te osobliwe promienie według wielkości, otrzymamy ciąg r_m o własności $\lim r_m = \infty$. Aby to uzasadnić, trzeba zauważyć, że promienie kół przechodzących przez punkty kratowe tworzą ciąg rosnący do nieskończoności; równanie takiego koła ma bowiem postać $u^2+v^2 = n = u_0^2+v_0^2$, gdzie u_0, v_0 jest punktem kratowym, a więc n jest liczbą całkowitą, tak że można te koła — nazwijmy je *kołami kratowymi* — uporządkować według n; nie każdemu n naturalnemu odpowiada koło kratowe, ale $n = 0, 1, 4, \ldots$ oraz każde n kształtu q^2 (q całkowite) daje takie koło, a stąd już wynika, że koła kratowe tworzą ciąg częściowy (nieskończony) ciągu kół o promieniu $\sqrt{n}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), gdzie n jest zerem lub liczbą naturalną.

Chcąc wykazać, że ciąg promieni osobliwych r_m dąży do nieskończoności, trzeba posłużyć się faktem już stwierdzonym w tw. II, które orzeka, że w każdym przedziale $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ ((5)) leży promień osobliwy, a także następującą uwagą: w pierścieniu utworzonym przez dwa kolejne koła kratowe leży co najwyżej jedno *koło osobliwe*, czyli koło o promieniu osobliwym — ta uwaga wynika stąd, że w pierścieniu nie ma punktów kratowych i że — jak wiemy już — koła osobliwe nigdy nie są kratowe, więc gdyby były dwa różne koła osobliwe w pierścieniu, to większe koło zawierałoby tyle punktów kratowych, co mniejsze, a ich pola byłyby różne, co przeczy definicji kół osobliwych; ta uwaga da się streścić krótko: koła osobliwe można uporządkować według wielkości rosnącej, a jest ich mnogość przeliczalna. Ponieważ dla każdego s naturalnego mamy promień osobliwy r_m większy od $4s+1$, więc $\lim r_m = \infty$ dla każdego uporządkowania zbioru promieni osobliwych.

TWIERDZENIE III. *Gdy koło o środku w $u = 0$, $v = 0$ powiększamy w sposób ciągły, tak żeby jego promień dążył do nieskończoności, to wciąż natrafiamy koła osobliwe, to jest takie, które zawierają wewnątrz tyle punktów kratowych, ile wynosi ich pole.*

Dowód tw. III poprzedza jego sformułowanie. Autor starał się otrzymać tw. III na drodze elementarnej. Wielki matematyk angielski, G. H. Hardy (1877-1947) zajmował się kwestią punktów kratowych (1924-5) i otrzymał przy użyciu teorii funkcyj Bessla wzór na różnicę $L(n)-n$, z którego można wyprowadzić nasze tw. III poprzez oszacowanie tej różnicy; jest jasne, że droga wytyczona klasycznymi wzorami (1) i (2) oraz (3)-(4)-(5) jest krótsza i łatwiejsza, jeżeli dążymy do celu określonego tekstem twierdzenia III.

Łatwo wykazać, że liczba punktów kratowych w kole *centralnym* (tj. takim, którego środek jest p. kratowym) jest zawsze kształtu $4k+1$ — wobec tego takie koło nigdy nie obejmie 7 punktów kratowych. Można jednak wykazać, że koło o polu 7 da się tak umieścić na kracie, żeby objęło dokładnie 7 punktów — w tym twierdzeniu można również zamiast 7 podać dowolną liczbę naturalną. Dowód nie jest trudny.

Ciekawe i niełatwe zagadnienie pominęliśmy w tej pogadance: czy między dwoma bezpośrednio po sobie następującymi kołami kratowymi zawsze leży koło osobliwe?