ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1963)

wmptm 1897

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O liczbach trójkątnych, będących sumami dwóch mniejszych liczb trójkątnych

Celem niniejszego artykułu jest dowód następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE. *Na to, żeby liczba trójkątna* $t_n = [n(n+1)]/2$ *była sumą dwóch mniejszych od niej liczb trójkątnych, potrzeba i wystarcza, żeby liczba* $n^2+(n+1)^2$ *była złożona.*

Dowód. Niech $m = n^2+(n+1)^2$ będzie liczbą naturalną $\geqslant 5$. Jeżeli więc liczba m nie jest złożona, to jest liczbą pierwszą i, w myśl twierdzenia 18, udowodnionego elementarnie w mej publikacji *Co wiemy, a czego nie wiemy o liczbach pierwszych*, Warszawa 1961, P. Z. W. S. str. 44, nie ma innego rozkładu liczby m na sumę dwóch kwadratów liczb naturalnych (jeżeli nie zwracać uwagi na porządek składników). Gdyby liczba t_n była sumą dwóch liczb trójkątnych od niej mniejszych (a więc dodatnich), mielibyśmy przy pewnych naturalnych x oraz $y \geqslant x$, $t_n = t_x+t_y$, skąd $(2n+1)^2+1 = (2x+1)^2+(2y+1)^2$; zatem $2m = (2x+1)^2+(2y+1)^2$, skąd $m = (y-x)^2+(x+y+1)^2$. Nie może tu być $y = x$, gdyż liczba m, jako pierwsza, nie jest kwadratem liczby naturalnej. Liczby $y-x$ oraz $x+y+1$ są więc naturalne, przy czym $x+y+1-(y-x) = 2x+1 > 1$, skąd wynika, że rozkład $m = (y-x)^2+(x+y-1)^2$ liczby m na sumę dwóch kwadratów liczb naturalnych jest różny od rozkładu $m = n^2+(n+1)^2$, co, jak wiemy, dla liczby pierwszej m jest niemożliwe. Dowiedliśmy więc, że warunek naszego twierdzenia jest konieczny.

Przypuśćmy teraz, że liczba m jest złożona. Gdyby liczba m miała dzielnik pierwszy postaci $p = 4k+3$, to mielibyśmy $(n+1)^2 \equiv -n^2 \pmod p$, skąd wynika, że liczby n i $n+1$ nie są podzielne przez p. Podnosząc obie strony tej kongruencji do potęgi o wykładniku $2k+1$, znaleźlibyśmy, wobec $2(2k+1) = p-1$ i w myśl małego twierdzenia Fermata: $1 \equiv (-1)^{2k+1} \pmod p$; zatem $2 \equiv 0 \pmod p$, co jest niemożliwe. Dzielniki pierwsze liczby (złożonej, nieparzystej) m są więc wszystkie postaci $4k+1$.

Liczba $2m = (2n+1)^2+1^2$, jako dająca przy dzieleniu przez 8 resztę 2, nie może być kwadratem liczby całkowitej. Gdyby liczba $2m$ nie dawała innego rozkładu na sumę dwóch kwadratów liczb naturalnych poza napisanym (oraz poza różniącym się od niego tylko porząd-

kiem składników), to ponieważ nie jest kwadratem, dawałaby tylko 8 rozkładów na sumę dwóch kwadratów liczb całkowitych. Z twierdzenia 8, ze strony 398 mej książki *Teoria liczb*, wyd. 3-cie, Warszawa-Wrocław 1950, wynikałoby, że liczba nieparzysta m (która, jak wiemy, ma tylko dzielniki pierwsze postaci $4k+1$) jest liczbą pierwszą. Skoro więc liczba m jest złożona, to liczba $2m = (2n+1)^2+1^2$ ma jeszcze inny rozkład na sumę dwóch kwadratów liczb naturalnych, $2m = a^2+b^2$, różniący się od poprzednio napisanego nie tylko porządkiem składników, skąd wynika, że $a \neq 1$ i $b \neq 1$. Ponieważ $2m$ przy dzieleniu przez 8 daje resztę 2, więc liczby a i b muszą być obie nieparzyste; zatem $a = 2x+1$, $b = 2y+1$, gdzie liczby x i y są naturalne, gdyż $a \neq 1$ oraz $b \neq 1$. Mamy więc $2m = (2n+1)^2+1 = (2x+1)^2+(2y+1)^2$, skąd $t_n = t_x+t_y$. Dowiedliśmy więc, że warunek naszego twierdzenia jest dostateczny.

Twierdzenie nasze zostało więc udowodnione.

Wynika z niego natychmiast, że pytanie, czy istnieje nieskończenie wiele liczb trójkątnych, które nie są sumami dwóch mniejszych od nich liczb trójkątnych jest równoważne pytaniu, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, będących sumami kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych.

Z przypuszczenia H_0 A. Schinzla, wypowiedzianego w Acta Arithmetica IV (1958) na str. 188, wynika z łatwością, że takich liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Dla $n \leqslant 10$ liczby pierwsze postaci $n^2+(n+1)^2$ otrzymujemy, jak łatwo sprawdzić, tylko przy $n = 1, 2, 4, 5, 7, 9$: są to liczby 5, 13, 41, 61, 113, 181.