ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1963)

wmptm 1897

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O ciągach liczb parami względnie pierwszych

Celem niniejszego artykułu jest podanie kilku twierdzeń o ciągach liczb całkowitych, parami względnie pierwszych. Jakkolwiek twierdzenia te są proste, a dowody ich elementarne, nie spotykałem ich w literaturze matematycznej.

TWIERDZENIE 1. *Każda liczba naturalna* >6 *jest sumą dwóch liczb naturalnych względnie pierwszych* >1.

Dowód. Jeżeli n jest liczbą nieparzystą >6, to $n=2+(n-2)$, przy czym $n-2>1$ oraz $(2, n-2)=1$, gdyż n jest nieparzyste. Twierdzenie 1 jest więc prawdziwe dla n nieparzystych większych od 6.

A oto dowód A. Mąkowskiego dla n parzystych.

Jeżeli n jest liczbą naturalną podzielną przez 4, $n=4k$, gdzie (wobec $n>6$) $k>1$, to $n=(2k-1)+(2k+1)$, gdzie $2k+1>2k-1>1$ i liczby $2k-1$ i $2k+1$, jako kolejne liczby nieparzyste, są względnie pierwsze.

Jeżeli wreszcie $n=4k+2$, gdzie k jest liczbą naturalną >1 (gdyż $n>6$), to $n=(2k+3)+(2k-1)$, przy czym liczby $2k-1$ i $2k+3$ są względnie pierwsze, gdyż w razie $0<d \mid 2k-1$ i $d \mid 2k+3$ mamy $d \mid (2k+3)-(2k-1)$, czyli $d \mid 4$, a ponieważ d jako dzielnik liczby nieparzystej musi być liczbą nieparzystą, więc musi być $d=1$. Twierdzenie 1 zostało więc udowodnione.

A. Mąkowski zauważył też, że z pewnej uwagi H. L. Adlera wynika, że liczba $g(n)$ wszystkich rozkładów liczby naturalnej $n>6$ na sumę dwóch liczb naturalnych $n=a+b$, gdzie $1<a<b$ oraz $(a, b)=1$, wynosi $g(n)=\frac{1}{2}[\varphi(n)-2]$, gdzie $\varphi(n)$ oznacza znaną funkcję Eulera-Gaussa. H. L. Adler zauważył mianowicie, że dla $n>1$, $\varphi(n)$ jest liczbą wszystkich układów dwóch liczb naturalnych x, y, takich iż $x+y=n$, $1 \leqslant x \leqslant n$ oraz $(x, n)=1=(y, n)$[1]. Lecz jeżeli $x+y=n$, to $(x, y)=1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x, n)=(y, n)=1$. Wynika stąd, że (dla $n>2$) $\varphi(n)$ jest liczbą rozkładów liczby n na sumę dwóch liczb naturalnych względnie pierwszych. Jeżeli wyłączymy tu rozkłady $n=1+(n-1)$

---

[1] H. L. Adler, *A generalization of the Euler φ-function*, Amer. Math. Monthly 65 (1958), str. 690-692.

oraz $n=(n-1)+1$, to w pozostałych $\varphi(n)-2$ rozkładach liczby x i y będą obie >1. Jak wiadomo, $\varphi(n)>2$ dla naturalnych $n>6$; stąd wynika natychmiast twierdzenie 1. A. Mąkowski zauważył też, że wobec tego, że $\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=+\infty$, wynika stąd również, iż liczba rozkładów liczby naturalnej n na sumę dwóch liczb naturalnych >1, względnie pierwszych wzrasta nieograniczenie (chociaż nie stale) wraz z n.

Wniosek 1. *Jeżeli p_k oznacza k-tą z kolei liczbę pierwszą (a więc $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$ itd.) oraz jeżeli k jest liczbą naturalną >2, to $p_{k+2}<p_1p_2\ldots p_k-1$.*

Dowód. Jeżeli $k>2$, to $n=p_1p_2\ldots p_k\geqslant 2\cdot 3\cdot 5>6$ i, w myśl twierdzenia 1, istnieją liczby a i b, obie >1, względnie pierwsze i takie, że $n=a+b$. Niech p oznacza jakikolwiek dzielnik pierwszy liczby a, zaś q jakikolwiek dzielnik pierwszy liczby b. Wobec $(a,b)=1$ będzie więc $p\neq q$ oraz $p\leqslant a=n-b<n-1$ i podobnie $q<n-1$. Jest więc $p<p_1p_2\ldots p_k-1$ oraz $q<p_1p_2\ldots p_k-1$. Mamy też $(p,n)=1$, gdyż w razie $p\mid n$, wobec $p\mid a$ oraz $n=a+b$, byłoby $p\mid b$, wbrew $(a,b)=1$. Liczby p i q są więc różne od $p_1,p_2,\ldots,p_k$, a ponieważ są różne, więc jedna z nich musi być $\geqslant p_{k+2}$. Stąd $p_{k+2}<p_1p_2\ldots p_k-1$, c. b. d. o.

Wniosek 2. *Jeżeli, dla naturalnych n, q_n oznacza najmniejszą liczbę pierwszą nie dzielącą n, to* $\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{n}=0$.

Dowód. Wobec wniosku 1 mamy dla naturalnych $k>1$:

$$(*)\qquad p_{k+1}+1<p_1p_2\ldots p_{k-1},\quad \text{skąd}\quad \frac{p_{k+1}+1}{p_1p_2\ldots p_k}<\frac{1}{p_k}\leqslant\frac{1}{k}.$$

Dla $n>2$ istnieje liczba naturalna k, taka iż

$$(**)\qquad p_1p_2\ldots p_k\leqslant n<p_1p_2\ldots p_kp_{k+1}$$

i dla $n>\mu_m=p_1p_2\ldots p_m$ będzie $k\geqslant m$; zatem $1/k\leqslant 1/m$. Gdyby było $q_n\geqslant p_{k+1}+1>p_{k+1}$, to, w myśl definicji liczby q_n, każda z liczb pierwszych $p_1,p_2,\ldots,p_{k+1}$, jako mniejsza od q_n, byłaby dzielnikiem liczby n, skąd $p_1p_2\ldots p_{k+1}\mid n$ oraz $n\geqslant p_1p_2\ldots p_{k+1}$, wbrew $(**)$. Jest więc $q_n<p_{k+1}+1$, skąd, wobec $(*)$:

$$\frac{q_n}{n}<\frac{p_{k+1}+1}{p_1p_2\ldots p_k}<\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{m};$$

zatem

$$\frac{q_n}{n}<\frac{1}{m}\quad\text{dla}\quad n>\mu_m,$$

co dowodzi, że $\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{n}=0$, c. b. d. o.

TWIERDZENIE 1ª. *Jeżeli* $m > 1$ *jest liczbą naturalną, to każda liczba naturalna* $n > 2m+2$ *jest sumą dwóch liczb naturalnych względnie pierwszych* $> m$.

Dowód. Niech n będzie liczbą naturalną $> 2m+2$. Jeżeli $n = 4k$, to $m = (2k-1)+(2k+1)$, gdzie składniki są względnie pierwsze, oraz, wobec $n = 4k > 2m+2$, mamy $2k+1 > 2k-1 > m$. Jeżeli $n = 4k+1$, to $n = 2k+(2k+1)$, gdzie znowu składniki są względnie pierwsze i $2k > m$. Podobne wnioski mamy dla $n = 4k+2$ ze wzoru $n = (2k-1)+(2k+3)$ oraz dla $n = 4k+3$ ze wzoru $n = (2k+1)+(2k+2)$. Twierdzenie 1ª zostało więc udowodnione.

TWIERDZENIE 2. *Każda liczba naturalna jest na nieskończenie wiele sposobów różnicą dwóch liczb naturalnych względnie pierwszych.*

Dowód. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to dla każdej liczby naturalnej k mamy rozkład $n = (nk+n+1)-(nk+1)$, przy czym $(nk+n+1, nk+1) = (n, nk+1) = 1$.

TWIERDZENIE 3. *Każda liczba naturalna* > 17 *jest sumą trzech liczb naturalnych* > 1, *parami względnie pierwszych.*

Dowód. Jeżeli n jest liczbą parzystą > 8, to mamy $n = 6k$, lub $n = 6k+2$, lub wreszcie $n = 6k+4$, przy czym, wobec $n > 8$, możemy przypuścić, że w pierwszych dwóch przypadkach k jest liczbą naturalną > 1, zaś w trzecim liczbą naturalną. Ze wzorów

$$6k = 2+3+[6(k-1)+1], \quad 6k+2 = 3+4+[6(k-1)+1],$$

$$6k+4 = 2+3+(6k-1)$$

wynika z łatwością, że n jest sumą trzech liczb naturalnych > 1, parami względnie pierwszych.

A oto dowód A. Mąkowskiego dla nieparzystych $n > 17$. Jeżeli n jest taką liczbą, to $n = 12k+r$, gdzie $r = 1, 3, 5, 7, 9$ lub 11, a k jest liczbą naturalną. Dla $r \leqslant 5$ możemy założyć, że $k > 1$, gdyż $12+5 = 17$, zaś $n > 17$. Dla $r = 7$ przy $k = 1$ mamy liczbę $12+7 = 3+5+11$, która jest sumą trzech liczb naturalnych > 1, parami względnie pierwszych — możemy więc dla $r = 7$ założyć, że $k > 1$. Z tożsamości

$$12k+1 = 9+(6k-7)+(6k-1),$$

$$12k+3 = 3+(6k-1)+(6k+1),$$

$$12k+5 = 3+(6k-5)+(6k+7),$$

$$12k+7 = 9+(6k+5)+(6k-7),$$

$$12k+9 = 9+(6k-1)+(6k+1),$$

$$12k+11 = 3+(6k+7)+(6k+1)$$

wynika (wobec uwag poczynionych co do liczby k), że n jest w każdym razie sumą trzech liczb naturalnych >1. Liczby w nawiasach są w każdej z tych sześciu równości względnie pierwsze, gdyż są wszystkie nieparzyste, niepodzielne przez 3, a różnica ich wynosi odpowiednio 6, 2, 12, 12, 2 i 6. Są one też pierwsze względem liczb 3 i 9. Mamy więc w każdym z tych sześciu przypadków rozkład liczby nieparzystej $n>17$ na sumę trzech liczb naturalnych >1, parami względnie pierwszych. Twierdzenie 3 zostało więc udowodnione.

Co do liczby 17, to łatwo można dowieść, że nie jest ona sumą trzech liczb naturalnych >1, parami względnie pierwszych.

Zauważymy też, że można dowieść, iż liczba 30 nie jest sumą czterech liczb naturalnych >1, parami względnie pierwszych, oraz że każda liczba naturalna $n>30$ jest taką sumą. Dla liczb nieparzystych >19 wynika to natychmiast z zastosowanego do liczby $n-2$ udowodnionego wyżej twierdzenia, że każda liczba nieparzysta >17 jest sumą trzech liczb nieparzystych >1, parami względnie pierwszych. Dla liczb zaś parzystych $n>30$, należałoby, dla $n=60k+r$, gdzie $r=0,2,4,\ldots,58$, zastosować 60 różnych tożsamości, jak na przykład

$$60k = 3+5+(30k-7)+(30k-1),$$
$$60k+2 = 3+5+(30k-7)+(30k+1),$$
$$60k+4 = 9+5+(30k-11)+(30k+1)$$

itp.

Nasuwa się pytanie, czy dla każdej liczby naturalnej $s>4$ każda dostatecznie wielka liczba naturalna jest sumą s liczb naturalnych >1, parami względnie pierwszych.

TWIERDZENIE 4. *Istnieją dowolnie długie postępy arytmetyczne, utworzone z liczb naturalnych >1, których każde dwa wyrazy są względnie pierwsze.*

Dowód. Niech n oznacza dowolną daną liczbę naturalną >1 i niech $a=n!$. Każde dwie z liczb $a+1, 2a+1, 3a+1, \ldots, na+1$ są względnie pierwsze. Gdyby bowiem dla pewnych naturalnych k i l, gdzie $k<l\leqslant n$, liczby $ka+1$ i $la+1$ nie były względnie pierwsze, to miałyby wspólny dzielnik pierwszy p i byłoby $p \mid (l-k)a$, zatem bądź $p \mid l-k$, bądź $p \mid a$. Lecz wobec $l-k<l\leqslant n$ jest $(l-k) \mid n! = a$. W każdym więc razie byłoby $p \mid a$, co wobec $p \mid ka+1$ jest niemożliwe. Udowodniliśmy więc twierdzenie 4.

W związku z twierdzeniem 4 zauważymy, że nie ma postępu arytmetycznego $ak+b$ $(k=1,2,\ldots)$, gdzie a i b są liczbami naturalnymi, którego każde dwa wyrazy byłyby względnie pierwsze. Udowodnimy nawet ogólniejsze twierdzenie następujące:

TWIERDZENIE 5. *Jeżeli $f(x)$ jest wielomianem o całkowitych współczynnikach, gdzie współczynnik przy najwyższej potędze x jest dodatni, to wyrazy ciągu nieskończonego $f(1), f(2), f(3), \ldots$ nie mogą być wszystkie parami względnie pierwsze.*

Dowód. Skoro w wielomianie $f(x)$ współczynnik przy najwyższej potędze x jest dodatni, to istnieje liczba naturalna n, taka iż $m = f(n) > 1$. Lecz wówczas, jak łatwo widzieć, liczba $f(m+n)$ jest podzielna przez m i liczby $f(n)$ i $f(m+n)$ mają wspólny dzielnik $m > 1$; przeto nie są względnie pierwsze. Udowodniliśmy więc twierdzenie 5.

TWIERDZENIE 6. *Jeżeli $f(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, gdzie współczynnik przy najwyższej potędze x jest dodatni, to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby istniało nieskończenie wiele liczb naturalnych $x_1, x_2, x_3, \ldots$, dla których każde dwie z liczb $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ są względnie pierwsze, jest następujący warunek* W.

W. *Nie istnieje żadna liczba naturalna $d > 1$, taka że $d \mid f(x)$ dla każdej liczby naturalnej x.*

Konieczność warunku W jest oczywista; udowodnimy więc jego dostateczność. W tym celu udowodnimy następujący

LEMAT. *Jeżeli s jest liczbą naturalną i $q_1, q_2, \ldots, q_s$ są różnymi liczbami pierwszymi, dla których istnieją liczby naturalne $x_1, x_2, \ldots, x_s$, takie że $q_i \nmid f(x_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$, to istnieje liczba naturalna x, taka iż $q_i \nmid f(x)$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$.*

Dowód lematu. Z warunku lematu wynika, że jest on prawdziwy dla $s = 1$. Niech teraz s oznacza daną liczbę naturalną i przypuśćmy, że lemat jest prawdziwy dla s liczb. Niech $q_1, q_2, \ldots, q_s, q_{s+1}$ będą różnymi liczbami pierwszymi, takimi że istnieją liczby naturalne $x_1, x_2, \ldots, x_{s+1}$, dla których $q_i \nmid f(x_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, s+1$. Ponieważ, w myśl założenia, lemat jest prawdziwy dla s liczb, więc istnieje liczba naturalna x_0, taka iż $q_i \nmid f(x_0)$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$. Lecz, w myśl założenia, $q_{s+1} \nmid f(x_{s+1})$. Ponieważ liczby pierwsze $q_1, q_2, \ldots, q_{s+1}$ są wszystkie różne, więc mamy $(q_1 q_2 \ldots q_s, q_{s+1}) = 1$ i przeto istnieją liczby naturalne k i l, takie iż $x_0 + kq_1 q_2 \ldots q_s = x_{s+1} + lq_{s+1}$. Niech $x = x_0 + kq_1 q_2 \ldots q_s = x_{s+1} + lq_{s+1}$. Wtedy

$$f(x) \equiv f(x_0) \bmod q_1 q_2 \ldots q_s \quad \text{oraz} \quad f(x) \equiv f(x_{s+1}) \bmod q_{s+1},$$

skąd, wobec $q_i \nmid f(x_0)$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$, oraz $q_{s+1} \nmid f(x_{s+1})$, wynika, że $q_i \nmid f(x)$ dla $i = 1, 2, \ldots, s, s+1$. Lemat nasz jest zatem prawdziwy dla $s+1$ liczb. Został on więc udowodniony przez indukcję.

Dowód twierdzenia 6. Przypuśćmy, że wielomian $f(x)$ spełnia warunek W. Ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze x w wielomianie $f(x)$ jest dodatni, istnieje liczba naturalna t, taka iż $f(t_1) > 1$. Niech teraz n oznacza liczbę naturalną $\geqslant 1$ i przypuśćmy, żeśmy już

wyznaczyli n liczb naturalnych $t_1, t_2, \ldots, t_n$, takich że (w razie $n > 1$) każde dwie z liczb naturalnych $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n)$ są względnie pierwsze. Niech q_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczby $f(t_1)f(t_2)\ldots f(t_n)$. Ponieważ wielomian $f(x)$ spełnia własność W, istnieją liczby naturalne $x_1, x_2, \ldots, x_s$, takie iż $q_i \nmid f(x_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$, skąd w myśl lematu wnosimy, że istnieje liczba naturalna t_{n+1}, taka iż $q_i \nmid f(t_{n+1})$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$. Wynika stąd natychmiast, że $\big(f(t_{n+1}), f(t_1)f(t_2)\ldots \ldots f(t_n)\big) = 1$. Każde dwie z liczb $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n), f(t_{n+1})$ są więc względnie pierwsze.

Liczby t_n $(n = 1, 2, \ldots)$ zostały zatem określone przez indukcję i ciąg nieskończony $f(t_1), f(t_2), f(t_3), \ldots$ ma tę własność, że każde dwa jego wyrazy są względnie pierwsze.

Dowiedliśmy więc, że warunek W jest dostateczny. Twierdzenie 6 zostało udowodnione.

W szczególności, dla dwumianu $f(x) = x^2+1$ łatwo byłoby dowieść, że wyrazy ciągu $f(2^{2^n})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są parami względnie pierwsze.

TWIERDZENIE 7. *Jeśli a, b, c są liczbami całkowitymi, $c \neq 0$, i jeśli równanie $ax+by = c$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y, to ma ono nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y względnie pierwszych.*

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że $a = 0$. Jeżeli istnieje rozwiązanie równania $ax+by = c$ w liczbach całkowitych x_0, y_0, to $y_0 \neq 0$ (gdyż $c \neq 0$) i liczby $x = ky_0+1$, $y = y_0$ będą dla $k = 1, 2, \ldots$ względnie pierwsze i będą spełniały nasze równanie. Możemy więc założyć dalej, że $a \neq 0$ i $b \neq 0$, a ponieważ możemy zmieniać znaki liczb a, b i c, zmieniając znaki liczb x i y, możemy dalej zakładać, że liczby a, b i c są naturalne, jako też że $(a, b) = 1$ (gdyż, jeżeli $d = (a, b)$, $a = da_1$, $b = db_1$, to wobec $ax+by = c$ mamy $d \mid c$, zatem $c = dc_1$, i równanie nasze jest równoważne równaniu $a_1x+b_1y = c_1$, gdzie $(a_1, b_1) = 1$).

Przypuśćmy więc, że a, b i c są liczbami naturalnymi, $(a, b) = 1$ oraz że przy pewnych całkowitych x_0 i y_0 mamy $ax_0+by_0 = c$. Będzie więc też $a(x_0+bt)+b(y_0-at) = c$ przy wszelkim całkowitym t.

Skoro $(a, b) = 1$, to, jak wiadomo, istnieją liczby całkowite u i v takie, że $au+bv = 1$.

Przyjmijmy

$$t = kc-(x_0v-y_0u)+1, \tag{1}$$

obierając liczbę naturalną k tak, aby liczba t była naturalna, co oczywiście zachodzi dla wszystkich dostatecznie wielkich k. Ze wzoru (1) wynika, że

$$\big(t+(x_0v-y_0u), c\big) = 1. \tag{2}$$

Gdyby d było liczbą naturalną, taką iż

$$d \mid x_0+bt, \quad d \mid y_0-at,$$

mielibyśmy $d \mid ax_0 + by_0 = c$ oraz, wobec $au + bv = 1$,

$$d \mid (x_0 + bt)v - (y_0 - at)u = x_0 v - y_0 u + (au + bv)t = x_0 v - y_0 u + t,$$

co wobec (2) dowodzi, że $d = 1$. Liczby całkowite $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$ są więc względnie pierwsze i mamy $ax + by = c$. Udowodniliśmy więc twierdzenie 7.

Jak mi zwrócił uwagę A. Schinzel, twierdzenie 7 wynika z łatwością z pewnego twierdzenia T. Skolema ogłoszonego w Norsk Mat. Tidsskrift 15, str. 25-27 (por. też Jahrbuch über die Fortschrifte der Math. 59 I (1933), Sonderheft II, str. 129).

WNIOSEK. *Każda liczba wymierna $w \neq 1$ może być na nieskończenie wiele sposobów przedstawiona w postaci $w = (x+1)/(y+1)$, gdzie x i y są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi.*

Dowód. Jeżeli $w = a/b$, gdzie $(a, b) = 1$ i $w \neq 1$, to równanie $a/b = (x+1)/(y+1)$ jest równoważne równaniu $bx - ay = a - b$, gdzie $a - b \neq 0$. Z twierdzenia 7 zaś wynika, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y względnie pierwszych.

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli $u_1, u_2, \ldots$ jest ciągiem Fibonacciego (tj. ciągiem określonym przez warunki: $u_1 = u_2 = 1$, zaś $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$), to istnieje ciąg nieskończony rosnący liczb naturalnych $n_1, n_2, \ldots$, taki iż każde dwie z liczb ciągu nieskończonego*

$$u_{n_1}, u_{n_2}, u_{n_3}, \ldots \tag{3}$$

są względnie pierwsze.

Dowód. Jeżeli m jest liczbą naturalną, to, jak wiadomo, reszty z dzielenia przez m kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego tworzą ciąg okresowy o okresie czystym (2). Ponieważ $u_1 = 1$, więc, jeżeli dla danego m, s_m jest liczbą wyrazów tego okresu, to $u_{ks_m+1} \equiv 1 \pmod m$ dla $k = 1, 2, \ldots$ Wynika stąd, że dla dowolnych liczb naturalnych m i h istnieje liczba naturalna $n > h$, taka, iż $(u_n, m) = 1$.

Określimy teraz przez indukcję ciąg nieskończony liczb naturalnych $n_1, n_2, \ldots$ w sposób następujący. Niech $n_1 = 1$ i przypuśćmy, że dla pewnej liczby naturalnej s już określiliśmy liczby naturalne $n_1 < n_2 < \ldots < n_s$. Liczbę n_{s+1} określimy jako najmniejszą liczbę naturalną $> n_s$, taką iż $(u_{n_{s+1}}, u_{n_1} u_{n_2} \ldots u_{n_s}) = 1$. Jasne jest, że wyrazy ciągu nieskończonego $u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots$ będą parami względnie pierwsze. Twierdzenie 8 zostało więc udowodnione.

---

(2) Zob. np. W. Sierpiński, *Teoria liczb*, cz. II, Warszawa 1959, str. 279, ćwiczenie 4.

Uwaga. W ciągu kolejnych liczb Fermata $F_n = 2^{2^n}+1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ wszystkie wyrazy są parami względnie pierwsze. W ciągu zaś liczb Mersenne'a $M_n = 2^n-1$, liczby ciągu M_{p_k} $(k = 1, 2, \ldots)$, gdzie p_k oznacza k-tą z kolei liczbę pierwszą, są parami względnie pierwsze. Można też dowieść, że wyrazy ciągu nieskończonego $M_{F_n} = M_{2^{2^n}+1} = 2^{2^{2^n}+1}-1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ są parami względnie pierwsze.

Jak zauważył A. Rotkiewicz, jeżeli $n_1, n_2, n_3, \ldots$ jest ciągiem nieskończonym liczb naturalnych, z których każde dwie są względnie pierwsze, to każde dwa wyrazy ciągu (3) są względnie pierwsze, gdyż jak wiadomo, dla naturalnych m i n mamy $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$[3]. W szczególności więc wyrazy ciągu nieskończonego $u_{F_n} = u_{2^{2^n}+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ są parami względnie pierwsze. A. Rotkiewicz zauważył, iż z podanego na (u_m, u_n) wzoru wynika też, że jeżeli $n_1, n_2, \ldots$ jest ciągiem nieskończonym rosnącym liczb naturalnych, to wyrazy ciągu (3) są wtedy i tylko wtedy parami względnie pierwsze, gdy $(n_k, n_l) \leqslant 2$ dla $1 \leqslant k \leqslant l$.

---

[3] Zob. np. moją książkę *Teoria liczb*, cz. II, Warszawa 1959, str. 280, ćwiczenie 5.