ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1963)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

O nieskończoności

(Odczyt popularny wygłoszony 7 listopada 1962 r. w Warszawie)

Z pojęciem nieskończoności spotykamy się zarówno w arytmetyce, jak i w geometrii. Na przykład: liczb naturalnych, czyli całkowitych dodatnich, jest nieskończenie wiele; prosta nieograniczona ma nieskończoną długość; odcinek prostej ma nieskończenie wiele punktów.

Jak można zdefiniować, *co to jest zbiór nieskończony?* Można powiedzieć, że jest to zbiór, który nie jest pusty i nie jest skończony, to znaczy, że liczba jego elementów nie daje się wyrazić żadną liczbą naturalną.

Z tej definicji wynika, że jeżeli jakiś zbiór Z jest nieskończony, to dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje n różnych elementów, które wszystkie należą do zbioru Z. Dowieść tego możemy przez indukcję.

Jest to prawdziwe dla $n = 1$, gdyż skoro zbiór Z nie jest pusty, to istnieje w nim jakiś element a_1. Przypuśćmy teraz, że twierdzenie nasze jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej n, a więc że istnieje n różnych elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, które wszystkie należą do zbioru Z. Gdyby prócz tych n elementów nie było w zbiorze Z żadnego innego, to zbiór Z miałby n elementów, a więc byłby skończony, wbrew założeniu. Istnieje więc w zbiorze Z jakiś element a_{n+1}, różny od każdego z elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Mamy więc $n+1$ różnych elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a_{n+1}, które wszystkie należą do zbioru Z. Twierdzenie jest więc prawdziwe dla liczby $n+1$. Stąd, przez indukcję, wnosimy o prawdziwości twierdzenia dla każdej liczby naturalnej n.

Już w arytmetyce spotykamy się z różnymi zbiorami nieskończonymi, na przykład ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych, ze zbiorem wszystkich liczb parzystych, ze zbiorem wszystkich liczb kwadratowych, ze zbiorem wszystkich liczb pierwszych. Zdawałoby się, że możemy powiedzieć, iż liczb naturalnych jest dwa razy więcej niż liczb parzystych dodatnich, gdyż dla każdego naturalnego n wśród pierwszych $2n$ liczb naturalnych $1, 2, 3, \ldots, 2n$ mamy tylko n (a więc połowę) liczb parzystych. Znacznie trudniej już byłoby dać odpowiedź na pytanie, czego jest więcej, czy liczb kwadratowych czy liczb pierwszych?

Do porównywania liczności zbiorów nieskończonych można by też podchodzić inną drogą, opartą na porównywaniu liczności zbiorów skończonych. Przypuśćmy, że mamy dwa pudełka zapałek: w jednym są zapałki białe, w drugim czerwone. W jaki sposób osoba nie znająca liczb mogłaby się przekonać, czy ilość zapałek w obu pudełkach jest jednakowa i w którym ewentualnie jest ich więcej?

Oto wyjmijmy z każdego pudełka po jednej zapałce (a więc jedną białą i jedną czerwoną) i odłóżmy je na bok. Gdy będziemy w ten sposób wyjmowali kolejno po jednej zapałce z każdego pudełka, to albo wyczerpiemy oba pudełka jednocześnie, albo też jedno z naszych pudełek będzie już puste, gdy w drugim pozostaną jeszcze zapałki. Pierwszy przypadek zajdzie oczywiście wtedy i tylko wtedy, gdy w obu pudełkach była ta sama liczba zapałek, w drugim zaś przypadku to pudełko zawiera mniej zapałek, które zostało puste, gdy w drugim były jeszcze zapałki.

Taki sposób postępowania możemy oczywiście stosować dla porównywania liczności dowolnych dwóch zbiorów skończonych: nie używając liczb ani liczenia możemy się zawsze przekonać, czy nasze zbiory są jednakowo liczne i który ewentualnie zawiera więcej elementów, przy czym wynik tego badania nie będzie zależny od tego, jak będziemy wybierali po jednym elemencie z każdego z naszych zbiorów.

Spróbujmy teraz tę metodę stosować do dwóch zbiorów nieskończonych. Jednym z nich niech będzie zbiór wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez 3, a więc zbiór złożony z liczb $3, 6, 9, 12, 15, \ldots, 3n, \ldots$, a drugim — zbiór wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 3, a więc zbiór złożony z liczb $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \ldots$ Wybierajmy kolejno według wielkości: jedną liczbę z pierwszego zbioru, a z drugiego liczbę o jedność większą od niej. A więc najpierw z pierwszego zbioru wybierzmy liczbę 3, z drugiego liczbę 4, potem z pierwszego zbioru liczbę 6, z drugiego liczbę 7, ogólnie — z pierwszego zbioru liczbę $3n$, z drugiego liczbę $3n+1$. Gdybyśmy w ten sposób wybrali kolejno wszystkie liczby pierwszego zbioru, a dla każdej z nich o jedność większą liczbę drugiego zbioru, to pierwszy zbiór będzie pusty, a w drugim pozostanie jeszcze nieskończenie wiele liczb, mianowicie liczby $1, 2, 5, 8, 11, \ldots$, czyli liczba 1 oraz liczby, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2. Zdawałoby się więc, że wobec tego możemy powiedzieć, iż pierwszy zbiór jest mniej liczny od drugiego.

Ale postąpmy teraz inaczej. Wybierajmy kolejno wszystkie parzyste liczby pierwszego zbioru, a dla każdej z nich dobierajmy z drugiego zbioru najmniejszą pozostałą w nim jeszcze liczbę. A więc wybierzmy z pierwszego zbioru liczbę 6, z drugiego liczbę 1, potem z pierwszego zbioru liczbę 12, z drugiego liczbę 2, następnie z pierwszego zbioru liczbę 18, z drugiego liczbę 4 itd. Okaże się wówczas, że w pierwszym zbiorze pozostanie jeszcze nieskończenie wiele liczb, mianowicie wszystkie liczby

nieparzyste podzielne przez 3, natomiast drugi zbiór będzie pusty, co doprowadzałoby do wniosku, że pierwszy zbiór jest liczniejszy od drugiego, wniosku sprzecznego z tym, który otrzymaliśmy przedtem.

Gdybyśmy wreszcie wybierali kolejno zawsze najmniejszą liczbę pozostałą w pierwszym zbiorze oraz najmniejszą liczbę pozostałą w drugim zbiorze, a więc 3 i 1, potem 6 i 2, następnie 9 i 4 itd., to oba zbiory okazałyby się puste, co skłaniałoby nas do wniosku, że zbiory te są jednakowo liczne.

W tym ostatnim przypadku elementy naszych dwóch zbiorów dadzą się połączyć w pary, tak by w każdej parze było po jednym elemencie z każdego z tych zbiorów i by każdy element każdego z naszych zbiorów miał swoją parę. Jeżeli dla dwóch danych zbiorów takie połączenie ich elementów w pary jest możliwe, to mówimy, że zbiory te są *równej mocy*.

Jasne jest, że dwa zbiory skończone są równej mocy wtedy i tylko wtedy, jeżeli mają tę samą liczbę elementów.

Aby stwierdzić, że dwa dane zbiory są równej mocy, niekoniecznie musimy kolejno wybierać po jednym elemencie z każdego z tych zbiorów i łączyć je w pary: wystarczy podać prawo, ustalające to łączenie w pary. Na przykład, żeby dowieść, że zbiór wszystkich liczb naturalnych nieparzystych jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych parzystych, wystarczy podać następujące prawo łączenia liczb w pary: dla każdej liczby nieparzystej, do tej samej pary zaliczamy o jedność od niej większą liczbę parzystą.

Zbiory, które są równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych, nazywamy *przeliczalnymi*. Są to więc zbiory, których elementy mogą być ponumerowane za pomocą liczb naturalnych w ten sposób, żeby każdemu elementowi zbioru odpowiadał oznaczony numer oraz żeby każdy numer odpowiadał pewnemu i tylko jednemu elementowi zbioru. Wszystkie elementy zbioru przeliczalnego mogą więc być ustawione w ciąg nieskończony

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \tag{1}$$

według kolejnych numerów (wskaźników). Na odwrót, zbiór wszystkich wyrazów każdego danego ciągu nieskończonego (o różnych wyrazach) jest przeliczalny.

Jasne jest, że część zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym, o ile nie jest zbiorem skończonym. Elementy bowiem każdej części zbioru (1) możemy ustawić w ciąg według rosnących wskaźników. Zatem na przykład zbiór wszystkich liczb nieparzystych, zbiór wszystkich liczb kwadratowych, zbiór wszystkich liczb pierwszych — są przeliczalne.

Nasuwa się pytanie, czy każdy zbiór nieskończony zawiera część przeliczalną. Zdawałoby się, że dowieść tego można bardzo łatwo. Oto z defi-

nicji zbioru nieskończonego, który nie jest pusty ani skończony, wynika, jak wiemy, że jeżeli ze zbioru nieskończonego Z usuniemy dowolną skończoną liczbę jego elementów, to pozostaną w nim jeszcze inne elementy, a nawet można powiedzieć, że powstały zbiór będzie nieskończony (bo gdyby był skończony, to zbiór Z, jako połączenie w jeden zbiór dwóch zbiorów skończonych, byłby oczywiście skończony, wbrew założeniu). Rozumujmy teraz tak: Ze zbioru Z wybierzmy jeden jego element a_1. Ze zbioru pozostałych elementów wybierzmy element a_2. Z powstałego po usunięciu ze zbioru Z elementów a_1 i a_2 zbioru wybierzmy jeden element a_3. Rozumując w ten sposób dalej, dochodzimy, zdawałoby się, do ciągu nieskończonego $a_1, a_2, a_3, \ldots$, utworzonego z różnych elementów zbioru Z, a więc do pewnej części przeliczalnej tego zbioru. Rozumowaniu temu zarzuca się, że wymaga ono stosowania nieskończenie wielu wyborów. Jeszcze w ubiegłym stuleciu G. Peano był zdania, że nie można dokonywać nieskończenie wielu wyborów bez podania ich prawa. W pewnych przypadkach potrafimy takie prawo podać. Na przykład, gdyby chodziło o wybranie nieskończenie wielu różnych punktów z danego odcinka (a, b) prostej: Przyjmując długość naszego odcinka za jednostkę długości, przyporządkujmy liczbie naturalnej n punkt a_n naszego odcinka, odległy od punktu a o długość wynoszącą $1/n$. Ciąg nieskończony $a_1, a_2, a_3, \ldots$ będzie więc określonym w zupełności ciągiem nieskończonym różnych punktów naszego odcinka. Potrafimy więc dowieść, że zbiór wszystkich punktów odcinka prostej zawiera część przeliczalną.

W pierwszym dziesiątku naszego wieku E. Zermelo wypowiedział pewnik, zwany obecnie *pewnikiem wyboru*, który opiewa, że *jeżeli mamy jakąkolwiek rodzinę R zbiorów Z, z których żadne dwa nie mają elementów wspólnych, to istnieje zbiór N zawierający po jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z tworzących rodzinę R.*

Otóż można dowieść, iż z pewnika wyboru wynika, że każdy zbiór nieskończony zawiera część przeliczalną.

Nie korzystając z pewnika wyboru dowiedliśmy wyżej, że *zbiór wszystkich punktów odcinka prostej zawiera część przeliczalną.* Nasuwa się teraz pytanie, czy zbiór wszystkich punktów odcinka prostej sam jest przeliczalny? Opierając się na tak zwanym pewniku Ascoli'ego można dowieść, że tak nie jest.

Pewnik Ascoli'ego brzmi jak następuje:

Jeżeli $d_1, d_2, \ldots$ jest ciągiem nieskończonym odcinków prostej, z których każdy następny jest zawarty w poprzedzającym, to istnieje punkt wspólny tym wszystkim odcinkom.

Przypuśćmy teraz, że zbiór wszystkich punktów odcinka d prostej jest przeliczalny. Istniałby więc ciąg nieskończony

$$p_1, p_2, p_3, \ldots \tag{2}$$

utworzony ze wszystkich punktów tego odcinka. Jasne jest, że istnieje odcinek d_1, zawarty w d i nie zawierający punktu p_1. Podobnie istnieje odcinek d_2, zawarty w d_1 i nie zawierający punktu p_2 itd. Łatwo byłoby nawet ustalić prawo budowania tych odcinków. Na przykład, mając już odcinek d_n podzielilibyśmy go na trzy równe części i wybralibyśmy jako d_{n+1} tę pierwszą z nich, która nie zawiera punktu p_{n+1}. W myśl pewnika Ascoli'ego istnieje punkt p wspólny wszystkim odcinkom $d, d_1, d_2, \ldots$ Punkt ten nie jest żadnym z punktów ciągu (2), gdyż przy wszelkim naturalnym n punkt p_n (jak to wynika ze sposobu otrzymania odcinka d_n) nie należy do odcinka d_n, a więc jest różny od punktu p, który do odcinka d_n należy. Założenie, że ciąg (2) zawiera wszystkie punkty odcinka d, doprowadza więc do sprzeczności.

Zbiór wszystkich punktów odcinka prostej nie jest więc przeliczalny.

Otrzymany wynik jest ważny z tego względu, że dowodzi, że *nie wszystkie zbiory nieskończone są równej mocy.*

Nasuwa się teraz pytanie, jak można by porównywać ze sobą co do wielkości moce zbiorów nieskończonych, nie będących równej mocy. Jeżeli zbiór A jest równej mocy z pewną częścią zbioru B, ale zbiór B nie jest równej mocy z żadną częścią zbioru A, to naturalne będzie uważać moc zbioru B za większą od mocy zbioru A. W ten sposób zbiór wszystkich punktów odcinka jest mocy większej od zbioru wszystkich liczb naturalnych.

Znamy więc już dwie różne moce zbiorów nieskończonych: moc zbiorów przeliczalnych i moc zbiorów wszystkich punktów odcinka, czyli tak zwaną *moc continuum*. Nasuwa się pytanie, czy istnieją jeszcze inne moce zbiorów nieskończonych, a w szczególności, czy istnieją zbiory nieskończone mocy większej od continuum. Można dowieść, że taki jest na przykład zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej. Twórca teorii mocy, G. Cantor dowiódł, że moc zbioru wszystkich różnych części danego zbioru jest zawsze większa od mocy tego zbioru. Wynika stąd, że *istnieje nieskończenie wiele różnych mocy zbiorów nieskończonych.*

Nasuwa się jeszcze pytanie, jak jest wtedy, gdy zbiór A jest równej mocy z pewną częścią zbioru B, zaś zbiór B jest równej mocy z pewną częścią zbioru A. Otóż można dowieść, że wtedy zbiory A i B są równej mocy. Jest to tak zwane *twierdzenie Cantora-Bernsteina.*

Inne pytanie, które się tu nasuwa, to: czy każde dwa zbiory dadzą się porównywać co do mocy, to znaczy czy zawsze co najmniej jeden z nich jest równej mocy z pewną częścią drugiego? Przy pomocy pewnika wyboru można dowieść, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca.

Powróćmy jeszcze do zbiorów przeliczalnych, a więc, jak wynika z pewnika wyboru, do zbiorów nieskończonych najmniejszej mocy. Jak

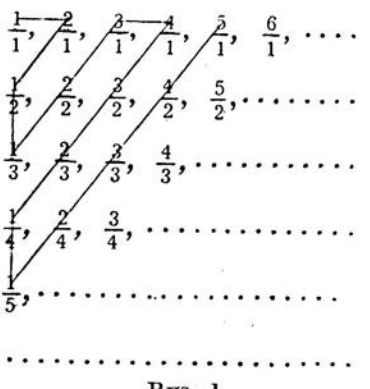
już mówiliśmy, z pewnika wyboru wynika, że każdy zbiór nieskończony zawiera część przeliczalną. Jeżeli więc zbiór Z jest nieskończony, to zawiera ciąg nieskończony $u_1, u_2, u_3, \ldots$ różnych elementów. Przyporządkujmy każdemu wyrazowi u_n tego ciągu wyraz następny u_{n+1}, zaś każdemu elementowi zbioru Z, nie będącemu żadnym wyrazem naszego ciągu (jeżeli także elementy w zbiorze Z istnieją) — sam ten element. Wynika stąd, że zbiór Z jest równej mocy ze zbiorem, który otrzymamy, usuwając ze zbioru Z jego element u_1, zatem zbiór Z jest równej mocy z pewną swą częścią właściwą (czyli częścią zbioru Z, różną od samego zbioru Z). Z pewnika wyboru wynika więc, że *każdy zbiór nieskończony jest równej mocy z pewną swą częścią właściwą*. Zbiory skończone własności tej oczywiście nie mają. Można więc podać następującą pozytywną definicję zbioru nieskończonego:

Zbiór nieskończony jest to taki zbiór, który jest równej mocy z pewną swą częścią właściwą. Zauważymy jednak, że bez pomocy pewnika wyboru nie potrafimy dowieść, że ta pozytywna definicja zbioru nieskończonego jest równoważna podanej na początku negatywnej definicji (że zbiorem nieskończonym jest zbiór niepusty, który nie jest skończony).

Ponieważ między każdymi dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi leży nieskończenie wiele różnych liczb wymiernych, mogłoby się wydawać, że liczb wymiernych jest nieskończenie razy więcej niż liczb całkowitych. Udowodnimy jednak, że *zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny.*

Weźmy pod uwagę najpierw tylko liczby wymierne dodatnie. Wypiszmy w pierwszym wierszu liczby wymierne o mianowniku 1 i wszystkich kolejnych licznikach naturalnych, a więc liczby

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \cdots$$



Rys. 1

W następnym wierszu wypiszmy liczby wymierne o mianowniku 2 i wszystkich kolejnych licznikach naturalnych, a więc liczby

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \cdots,$$

ogólnie, w n-tym wierszu wszystkie liczby wymierne o mianowniku n i wszystkich kolejnych licznikach naturalnych. Otrzymamy w ten sposób ciąg nieskończony ciągów nieskończonych.

Ustawmy teraz wszystkie wyrazy tej tablicy nieskończonej w ciąg nieskończony w sposób wskazany na rysunku 1, czyli za pomocą tak

zwanej metody przekątnych. Otrzymamy w ten sposób ciąg nieskończony

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$$

w którym znajdą się wszystkie liczby wymierne dodatnie, przy czym każda z nich nieskończenie wiele razy, gdyż $l/m = kl/km$ dla $k = 1, 2, \ldots$ Gdybyśmy stąd chcieli otrzymać ciąg nieskończony, w którym każda liczba wymierna dodatnia występuje tylko raz, należałoby z otrzymanego wyżej ciągu pousuwać te ułamki, które dadzą się skrócić. Otrzymalibyśmy w ten sposób ciąg

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$$

Stawiając przed każdą z tych liczb znak $-$, otrzymalibyśmy ciąg nieskończony

$$-\frac{1}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{1}, -\frac{4}{1}, -\frac{3}{2}, \cdots$$

zawierający raz każdą liczbę wymierną ujemną.

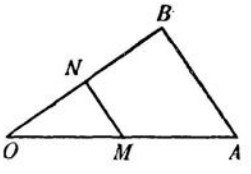
Gdybyśmy wreszcie chcieli otrzymać ciąg nieskończony, zawierający raz każdą liczbę wymierną, należałoby jako pierwszy wyraz jego wypisać liczbę 0, a następnie kolejno wypisać po jednym wyrazie na przemian z każdego z otrzymanych wyżej dwóch ciągów. Byłby to więc ciąg nieskończony

$$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \cdots$$

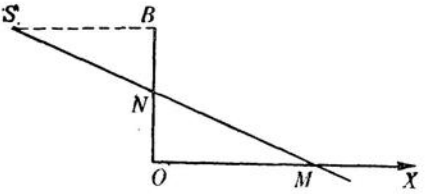
Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest więc przeliczalny.

Z dowodu naszego wynika też, że łącząc ze sobą w jeden zbiór dwa zbiory przeliczalne, otrzymujemy zbiór przeliczalny. Wynika stąd, że zbiór wszystkich liczb niewymiernych nie jest przeliczalny, gdyż w przeciwnym razie, wobec przeliczalności zbioru wszystkich liczb wymiernych, zbiór wszystkich liczb rzeczywistych byłby przeliczalny; tymczasem, co łatwo zauważyć, zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\geqslant 0$ i $\leqslant 1$ jest równej mocy ze zbiorem wszystkich punktów odcinka prostej o długości 1: aby uzyskać żądany sposób łączenia w pary liczb rzeczywistych x, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 1$, z punktami naszego odcinka, wystarczy liczbę x połączyć w parę z punktem naszego odcinka odległym o x od jego lewego końca. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\geqslant 0$ i $\leqslant 1$ jest więc mocy continuum; zatem jest nieprzeliczalny. Tym bardziej nie jest przeliczalny zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, skąd wynika, jak wiemy, że nie może być przeliczalny zbiór wszystkich liczb niewymiernych.

Jako przykład dwóch zbiorów nieprzeliczalnych równej mocy weźmy zbiory punktów dwóch odcinków prostej, będących różnej długości. Ustawmy te dwa odcinki OA i OB tak, by tworzyły kąt AOB o wspólnym tym odcinkom wierzchołku (zob. rys. 2). Za tworzące jedną parę punkty naszych odcinków uważajmy te, które leżą na tej samej równoległej do AB (na przykład M i N). Łatwo zauważyć, że w ten sposób ustalamy żądane łączenie w pary punktów naszych odcinków, którego istnienie dowodzi, że zbiory ich punktów są równej mocy.

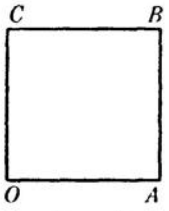


Rys. 2



Rys. 3

Ale i zbiór punktów nieskończonego ramienia prostej jest równej mocy ze zbiorem punktów skończonego odcinka. Niech OX oznacza nieskończone ramię prostej, OB — odcinek skończony (zob. rys. 3), który umieścimy prostopadle do OX. Na przedłużeniu równoległej do OX przechodzącej przez punkt B weźmy punkt S i połączmy w pary takie punkty naszych zbiorów, które leżą na tej samej prostej, przechodzącej przez S. W ten sposób zostanie ustalone, że zbiór punktów nieskończonego ramienia prostej OX jest równej mocy ze zbiorem wszystkich punktów odcinka OB, z wyjątkiem punktu B.



Rys. 4

Zdawałoby się, że zbiór wszystkich punktów płaszczyzny jest większej mocy niż zbiór wszystkich punktów prostej. Można jednak dowieść, że zbiory te są równej mocy.

Podamy tu dowód na to, że zbiór wszystkich punktów leżących wewnątrz kwadratu jest równej mocy z pewnym zbiorem punktów, leżącym wewnątrz odcinka prostej. Weźmy punkt p o współrzędnych x i y, leżący wewnątrz kwadratu $OABC$ o bokach o długości 1. Współrzędne x i y tego punktu będą więc liczbami dodatnimi < 1. Lecz, jak wiadomo, każda taka liczba daje, i to tylko jedno, rozwinięcie na ułamek dziesiętny nieskończony, w którym nieskończenie wiele cyfr jest różnych od 9. Niech

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots, \qquad y = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

będą takimi rozwinięciami liczb x i y. Niech teraz

$$z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots$$

będzie liczbą, której część ułamkową otrzymamy wypisując kolejno po jednej cyfrze rozwinięcia x i rozwinięcia y. Będzie to liczba dodatnia < 1 (gdyż, z założenia, że $0 < x < 1$ wynika, że nie wszystkie cyfry a_n są równe zeru, i nieskończenie wiele jest różnych od 9). Punkt p połączmy w parę z punktem $q(z)$ odcinka OA, odległym od punktu O o długość z. Ponieważ każda liczba dodatnia daje tylko jedno rozwinięcie na ułamek dziesiętny, w którym nieskończenie wiele cyfr jest różnych od 9, więc, jak łatwo zauważyć, różnym punktom $p(x, y)$ będą odpowiadały różne punkty $q(z)$. Wynika stąd, że zbiór wszystkich punktów leżących wewnątrz kwadratu $OABC$ jest równej mocy z pewną częścią zbioru wszystkich punktów leżących wewnątrz odcinka OA.

Pewna modyfikacja tego dowodu dałaby dowód na to, że zbiór wszystkich punktów prostej jest równej mocy ze zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, a także ze zbiorem wszystkich punktów przestrzeni trójwymiarowej.

Jeżeli elementy dwóch lub więcej zbiorów połączymy w jeden zbiór, to mówimy, że tworzymy *sumę tych zbiorów*. Jeżeli zbiory są skończone, i nie mają elementów wspólnych, to suma dwóch takich zbiorów ma więcej elementów niż każdy z nich. A jak jest dla zbiorów nieskończonych?

Otóż przy pomocy pewnika wyboru można dowieść, że *moc sumy dwóch zbiorów nieskończonych jest zawsze równa mocy tego z tych zbiorów, którego moc jest nie mniejsza od mocy drugiego*. Przy pomocy pewnika wyboru można też dowieść, że jeżeli ze zbioru nieskończonego Z usuniemy elementy tworzące zbiór mniejszej mocy niż zbiór Z, to pozostały zbiór będzie tej samej mocy co zbiór Z. Na przykład, jeżeli ze zbioru wszystkich liczb rzeczywistych, który jest mocy continuum, usuniemy zbiór wszystkich liczb wymiernych, który — jak wiemy — jest przeliczalny, to powstały zbiór, czyli zbiór wszystkich liczb niewymiernych, będzie mocy continuum.

Nasuwa się pytanie, czy istnieją zbiory nieskończone punktów prostej, które nie byłyby ani przeliczalne, ani mocy continuum. Przypuszczenie, że takich zbiorów nie ma, nosi nazwę *hipotezy continuum*[1]. Hipoteza ta, wypowiedziana przez G. Cantora, nie została dotąd dowiedziona, ani też obalona, ale K. Gödel dowiódł, że wyprowadzając z niej wnioski, nie dojdziemy nigdy do sprzeczności, chyba, że inne pewniki teorii mnogości, które są ogólnie przyjmowane, byłyby sprzeczne.

Ciekawe jest, że hipoteza continuum jest równoważna następującemu twierdzeniu, w którego sformułowaniu nie używamy pojęcia nieskończoności:

---

[1] Hipotezie continuum poświęciłem książkę w języku francuskim *Hypothèse du continu*, której drugie wydanie (274 strony) ukazało się nakładem Chelsea Publishing Company w 1956 roku w Nowym Jorku.

Zbiór wszystkich punktów przestrzeni trójwymiarowej daje się rozbić na trzy zbiory, z których pierwszy jest skończony na każdej równoległej do osi OX, drugi jest skończony na każdej równoległej do osi OY, trzeci zaś jest skończony na każdej równoległej do osi OZ.

G. Cantor wypowiedział też ogólniejszą hipotezę niż hipoteza continuum. Ta uogólniona hipoteza continuum jest równoważna następującej:

Jeżeli Z jest dowolnym zbiorem nieskończonym, T jest zbiorem wszystkich różnych części zbioru Z, to nie ma zbioru, który byłby mocy większej niż zbiór Z, a jednocześnie mniejszej niż zbiór T.

Hipoteza continuum jest przypadkiem szczególnym tej uogólnionej hipotezy, gdy jako zbiór Z weźmiemy zbiór wszystkich liczb naturalnych.

Jeżeli mamy zbiór skończony o $n > 1$ elementach, to możemy jego elementy w różny sposób porządkować (na przykład zbiór z trzech elementów a, b, c można uporządkować na sześć różnych sposobów: a, b, c; a, c, b; b, a, c; b, c, a; c, a, b; c, b, a) i przy każdym uporządkowaniu będzie istniał element pierwszy, następnie drugi, ogólnie k-ty (dla $k \leqslant n$) i wreszcie ostatni. Inaczej jest ze zbiorami nieskończonymi. Na przykład wyrazy ciągu nieskończonego

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

oprócz uporządkowania według rosnących wskaźników, przy którym nie ma wyrazu ostatniego, mogą być też inaczej uporządkowane, na przykład w ten sposób, że pierwszy wyraz ciągu u_1 przeniesiemy na ostatnie miejsce:

$$u_2, u_3, u_4, \ldots, u_1,$$

ogólnie, dla każdego naturalnego n:

$$u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_n,$$

albo też tak, że pozostawiając wyrazy o wskaźnikach nieparzystych uporządkowane według rosnących wskaźników, będziemy uważali wyrazy o wskaźnikach parzystych za późniejsze od nich wszystkich, porządkując je znowu według rosnących wskaźników parzystych:

$$u_1, u_3, u_5, \ldots, u_2, u_4, u_6, \ldots$$

Można też uporządkować wyrazy ciągu nieskończonego według wskaźników malejących, co daje uporządkowanie

$$\ldots, u_4, u_3, u_2, u_1.$$

Nie ma tu elementu pierwszego, ani drugiego itd., ale za to jest element ostatni, przedostatni, trzeci od końca itd.

Można też na różne inne sposoby porządkować wyrazy naszego ciągu, na przykład uważając z dwóch jego wyrazów za wcześniejszy ten, którego wskaźnik ma mniej dzielników pierwszych, a w razie równości liczby tych dzielników — ten, którego wskaźnik jest mniejszy.

Rozważania te doprowadzają do pojęcia typów porządkowych oraz tak zwanych liczb porządkowych.

Kto chciałby się zapoznać bliżej z poruszonymi tu kwestiami, znajdzie je w następujących moich publikacjach:

Wstęp do teorii mnogości i topologii, wydanie II PZWS, Warszawa 1947, stron 136, oraz wydanie angielskie:

Introduction to the Theory of Sets and Topology, The Indian Press, Allahabad, stron 154.

Leçons sur les nombres transfinis, wyd. II, Paryż, Gauthier-Villars, 1950, stron 240.

Cardinal and ordinal numbers, Warszawa, PWN, 1958, stron 487.