ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1963)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

E. PIEGAT (Wrocław)

O średnicach figur wypukłych płaskich

1. Przez *figurę wypukłą* rozumiemy zbiór domknięty i ograniczony, do którego należy wraz z każdymi dwoma punktami odcinek łączący te punkty. *Średnicą* figury wypukłej nazywamy każdą prostą połowiącą jej pole.

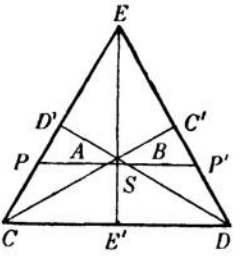
Zarankiewicz udowodnił([1]), że *punkt jest środkiem symetrii figury wypukłej płaskiej wtedy i tylko wtedy, gdy jest jedynym punktem, przez który przechodzą co najmniej 3 różne średnice tej figury.*

Dowód tego twierdzenia (u Zarankiewicza jest to twierdzenie 3) opiera się m. in. na następującym lemacie (lemat 3): *jeżeli dwa punkty A i B leżą na średnicy PP' zbioru wypukłego płaskiego i zarówno przez A, jak przez B przechodzą średnice różne od PP', to przez każdy punkt wewnętrzny odcinka AB przechodzą 3 różne średnice.*

Lemat ten jest dowiedziony w wymienionej pracy tylko dla przypadku, kiedy środek średnicy PP' leży poza odcinkiem AB. Jeżeli zaś środek O średnicy PP' leży na odcinku AB, to przez każdy punkt wewnętrzny tego odcinka, różny od O przechodzą co najmniej 3 różne średnice, a przez punkt O co najmniej 2 różne średnice. Dowód tego przypadku jest analogiczny do dowodu lematu 3 z pracy Zarankiewicza.

A oto przykład dowodzący, że ten drugi przypadek jest możliwy.

W trójkącie równobocznym CDE o boku 1 (rys. 1) niech PP' będzie średnicą równoległą do CD. Niech C', E' i D' będą spodkami wysokości opuszczonych z wierzchołków C, D i E. Wysokość EE' połowi pole trójkąta i przechodzi przez środek S średnicy PP'. Wówczas wszystkie proste połowiące pole trójkąta CDE (z wyjątkiem prostych EE' i PP') przecinają wysokość EE' w punktach wewnętrznych odcinka SE. Wobec symetrii



Rys. 1

([1]) *O prostych połowiących pola wypukłe*, Wiadomości Matematyczne II, 1959, s. 228-234.

względem prostej EE' przez punkt S przechodzą więc tylko 2 średnice: EE' i PP'. Niech dalej A i B będą punktami przecięcia średnicy PP' z wysokościami CC' i DD'. Zarówno przez A, jak przez B przechodzą średnice różne od PP', mianowicie CC' przez A i DD' przez B. Spełnione są zatem założenia lematu 3 z pracy Zarankiewicza, ale nie jest spełniona teza tego lematu.

Nie powoduje to jednak błędu w dowodzie jego twierdzenia 3 dlatego, że — jak się okazuje — w tym dowodzie korzysta się jedynie z istnienia punktów na odcinku AB, przez które przechodzą po 3 średnice. Dzięki temu mogę w dalszym ciągu opierać się na twierdzeniu 3 Zarankiewicza, jako prawdziwym. Lemat zaś mogę stosować w następującym, poprawnym już brzmieniu:

(Λ) *Jeżeli dwa punkty A i B leżą na średnicy PP' zbioru wypukłego płaskiego W i zarówno przez A jak, przez B przechodzą średnice tego zbioru różne od PP', to*

a) *w przypadku, kiedy środek średnicy PP' leży poza odcinkiem AB, przez każdy punkt wewnętrzny tego odcinka przechodzą co najmniej po 3 różne średnice zbioru W,*

b) *w przypadku, kiedy środek średnicy PP' leży na odcinku AB, przez ten środek przechodzą co najmniej 2 średnice, a przez pozostałe punkty wewnętrzne odcinka AB co najmniej po 3 średnice zbioru W.*

2. Ta sama praca Zarankiewicza zawiera dowód, że *jeżeli W jest trójkątem równobocznym, to istnieje w nim taki trójkąt równoboczny T, że przez każdy punkt $p \in T$ przechodzą 3 różne średnice trójkąta W.* Jednakże ten dowód jest błędny w sposób istotny, ponieważ jest on oparty na lemacie 3 w całej rozciągłości tego lematu.

Mimo to twierdzenie jest prawdziwe. Udowodnię tu więcej: mianowicie, że taki *trójkąt T istnieje w każdej figurze wypukłej płaskiej W nie mającej środka symetrii.*

Niech Z będzie zbiorem tych punktów, przez które przechodzą co najmniej po 2 różne średnice figury W. Zbiór Z jest oczywiście niepusty, ponieważ w każdym zbiorze punktów o polu dodatnim i w każdym kierunku istnieje średnica tego zbioru.

Będę się opierał na następujących lematach, z których pierwszy jest oczywisty:

LEMAT I. *Każde dwie średnice figury wypukłej W leżącej na płaszczyźnie przecinają się.*

Gdyby bowiem średnica PP' dzieliła figurę wypukłą W na dwie części W_1 i W_2 o równych polach, a średnica QQ' nie przecinała średnicy PP', to QQ' dzieliłaby tylko jedną z figur W_1 i W_2, a więc nie mogłaby połowić pola figury W.

LEMAT II. *Jeżeli figura wypukła na płaszczyźnie nie ma środka symetrii, to jej zbiór Z zawiera pewien trójkąt.*

Istotnie, z twierdzenia 3 Zarankiewicza łatwo wynika, że figura W bez środka symetrii musi zawierać co najmniej 2 takie punkty P i Q, przez które przechodzą co najmniej po 2 średnice. Niech to będą średnice k i p przechodzące przez P oraz l i q — przez Q.

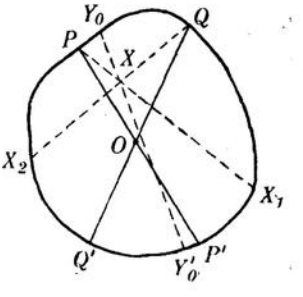
W przypadku, kiedy wszystkie średnice k, l, p i q są różne, obie średnice l i q, przechodzące przez Q, muszą przecinać na mocy lematu I średnicę p. Oznaczmy te punkty przecięcia odpowiednio przez R i S. Pokażę, że przez każdy punkt wewnętrzny X trójkąta QRS przechodzą co najmniej 2 średnice figury W.

Jest oczywiste, że przez punkt X przechodzi jakaś średnica x tej figury. Ponieważ prosta x przecina obwód trójkąta PQR w dwu punktach A i B, leżących na różnych bokach tego trójkąta, czyli na różnych średnicach figury W, więc zarówno przez A, jak przez B przechodzą co najmniej po 2 średnice tej figury. Spełnione są zatem założenia lematu (Λ). Więc przez każdy punkt odcinka AB, w szczególności przez punkt X, przechodzą co najmniej po 2 średnice.

Niech R będzie punktem wspólnym średnic p i q w przypadku, gdy np. $k = l$. Analogicznie jak w poprzednim przypadku dowodzi się, że przez każdy punkt wewnętrzny trójkąta PQR przechodzą co najmniej 2 średnice.

WNIOSEK. *Jeśli figura W wypukła i leżąca na płaszczyźnie nie ma środka symetrii, to wnętrze jej zbioru Z jest niepuste.*

Rozpatrzmy teraz dwie różne średnice PP' i QQ' figury W wypukłej i leżącej na płaszczyźnie, przecinające się w punkcie O (rys. 2). Punkty P i Q dzielą brzeg tej figury na dwa łuki. Niech PQ oznacza ten łuk łączący punkty P i Q, na którym nie leżą punkty P' i Q'. Podobnie, niech $P'Q'$ oznacza ten łuk łączący punkty P' i Q', na którym nie leżą punkty P i Q.



Rys. 2

LEMAT III. *Przez każdy punkt X figury wypukłej płaskiej W, leżący wewnątrz kąta POQ, przechodzi średnica, której końce leżą odpowiednio na łukach PQ i P'Q'.*

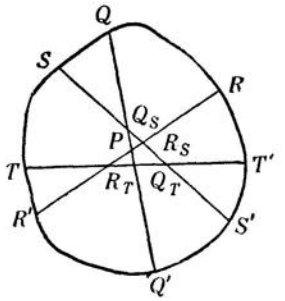
Niech punkt Y porusza się w sposób ciągły po łuku PQ od P do Q. Gdy $Y = P$, to prosta PXX_1 dzieli figurę na 2 części: $PX_1P'Q'$ i PX_1Q, dla których stosunek pól $a(P)$ jest większy od 1. Gdy zaś $Y = Q$, to ten stosunek $a(Q)$ jest mniejszy od 1.

Wskutek ciągłości istnieje między punktami P i Q na łuku PQ taki punkt Y_0, dla którego $a(Y_0) = 1$.

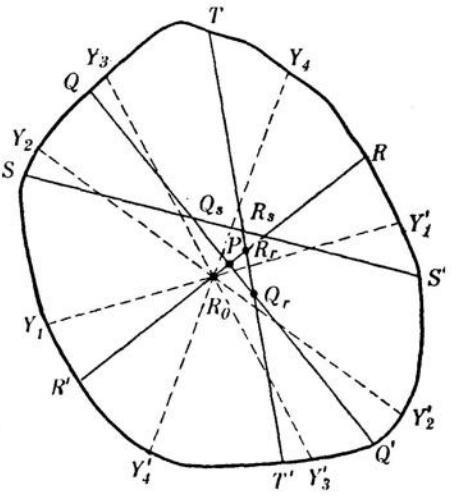
Drugi koniec średnicy przechodzącej przez Y_0 musi leżeć na łuku $P'Q'$, ponieważ w przeciwnym razie średnica ta nie przecinałaby jednej ze średnic PP' i QQ', wbrew lematowi I.

TWIERDZENIE 1. *Przez każdy punkt wewnętrzny zbioru Z przechodzą co najmniej 3 średnice figury W.*

Dowód. Wnętrze zbioru Z, jako zbioru punktów, przez które przechodzą co najmniej po 2 średnice figury W, jest niepuste na mocy wniosku. Niech więc P będzie dowolnym punktem wnętrza zbioru Z, a QQ' i RR'



Rys. 3



Rys. 4

dwiema średnicami przechodzącymi przez punkt P. Na każdej z nich po obu stronach punktu P, jako wewnętrznego, leżą punkty zbioru Z. Oznaczmy takie punkty średnicy QQ' przez Q_S i Q_T (rys. 3). Zatem przez punkt Q_S przechodzi średnica SS' różna od QQ' i podobnie przez punkt Q_T przechodzi średnica TT', też różna od QQ'. Na mocy lematu I każda z tych średnic przecina średnicę RR'; oznaczmy te punkty przecięcia odpowiednio przez R_S i R_T.

Jeżeli teraz punkt P leży między R_S a R_T, to na mocy lematu III na łuku ST leży taki punkt X, że prosta XP połowi pole figury W. Jest to więc trzecia średnica przechodząca przez punkt P, różna oczywiście od QQ' i RR'.

Jeżeli zaś punkty R_S i R_T leżą po jednej stronie punktu P (rys. 4), to ponieważ P jest punktem wewnętrznym zbioru Z, więc na odcinku PR' musi leżeć jakiś punkt R_0, przez który przechodzi jeszcze co najmniej jedna średnica YY' różna od RR'.

Możliwe są 4 następujące położenia średnicy YY':

1. Y leży na łuku $R'S$, a Y' na łuku RS' (Y_1Y_1' na rys. 4),
2. Y leży na łuku SQ, a Y' na łuku $S'Q'$ (Y_2Y_2' na rys. 4),
3. Y leży na łuku QT, a Y' na łuku $Q'T'$ (Y_3Y_3' na rys. 4),
4. Y leży na łuku TR, a Y' na łuku $T'R'$ (Y_4Y_4' na rys. 4).

Przypominamy, że przez łuk np. $R'S$ rozumiemy ten łuk (część brzegu), na którym nie leży żaden z punktów R i S'.

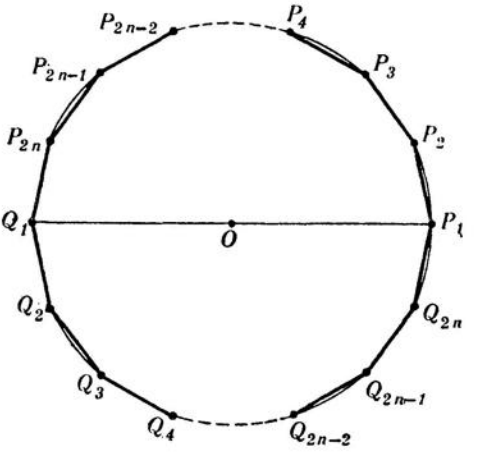
W każdym z tych przypadków istnienie trzeciej średnicy przechodzącej przez punkt P wynika z lematu III dla kątów opartych odpowiednio na łukach Y_1S, $Y_2'S'$, Y_3T i $Y_4'T'$. W ten sposób dowód twierdzenia jest zakończony.

TWIERDZENIE 2. *Niech W będzie figurą wypukłą leżącą na płaszczyźnie, a K — krzywą zwykłą zamkniętą o tej własności, że przez każdy jej punkt przechodzą co najmniej 2 średnice figury W. Wtedy przez każdy punkt leżący wewnątrz krzywej K przechodzą co najmniej 3 średnice figury W.*

Dowód. Niech P leży wewnątrz krzywej K. Prosta połowiąca pole figury W i przechodząca przez P przecina krzywą K co najmniej w dwu takich punktach R_1 i R_2, że punkt P leży między nimi. Ponieważ przez każdy z punktów R_1 i R_2 przechodzą co najmniej 2 średnice figury W, więc z lematu (Λ) wynika, że przez P przechodzą co najmniej 2 średnice tej figury. Na mocy twierdzenia 1 przechodzą więc przez punkt P co najmniej 3 średnice figury W.

3. Zarankiewicz postawił następujące pytanie: *czy dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ istnieje figura wypukła F zawierająca punkt, przez który przechodzi dokładnie n średnic tej figury?*

Dla n nieparzystych figurami takimi są, jak zauważył Zarankiewicz, np. n-kąty foremne. Punktem O o żądanej własności jest środek takiego wielokąta, a odpowiednimi średnicami są proste łączące wierzchołki wielokąta ze środkami boków przeciwległych. Każda z nich połowi oczywiście pole wielokąta i tylko te proste przechodzące przez punkt O połowią pole.



Rys. 5

Otóż odpowiedź na pytanie Zarankiewicza jest twierdząca dla wszystkich $n > 2$.

Istotnie, niech W będzie wielokątem foremnym o $4n$ bokach. Figurę F otrzymamy przez dodanie do wielokąta W niektórych odcinków koła opisanego na nim.

Niech O będzie środkiem wielokąta W, a P_1Q_1 jedną z prostych łączących wierzchołki przeciwległe. Dla uproszczenia możemy założyć, że jest ona pozioma. Wierzchołki leżące nad prostą P_1Q_1 oznaczamy kolejno przez $P_2, P_3, \ldots, P_{2n}$, a leżące pod nią przez $Q_2, Q_3, \ldots, Q_{2n}$ (rys. 5). Tak więc wierzchołek przeciw-

legły do P_k jest oznaczony przez Q_k. Do wielokąta dodajemy $2n$ odcinków koła opisanego opartych na cięciwach $P_1P_2, P_3P_4, \ldots$ $\ldots, P_{2n-1}P_{2n}, Q_2Q_3, Q_4Q_5, \ldots, Q_{2n-2}Q_{2n-1}, Q_{2n}P_1$. Naprzeciw każdej cięciwy z dodanym odcinkiem koła leży więc cięciwa bez dodanego odcinka koła. Pokażę, że z prostych przechodzących przez punkt O proste $P_1Q_1, P_3Q_3, \ldots, P_{2n-1}Q_{2n-1}$ i tylko te proste dzielą pole tak otrzymanej figury F na połowy.

Po każdej stronie prostej $P_{2k-1}Q_{2k-1}$ leży n dodanych odcinków koła: po jednej stronie odcinki oparte na cięciwach $P_{2k-1}P_{2k}, P_{2k+1}P_{2k+2}, \ldots$ $\ldots, P_{2n-1}P_{2n}, Q_2Q_3, \ldots, Q_{2k-2}Q_{2k-1}$, czyli $(2k-2)/2+[2n-(2k-2)]/2 = n$ odcinków, a po drugiej stronie pozostałe n odcinków koła. Zatem każda prosta $P_{2k-1}Q_{2k-1}$ połowi pole figury F. Żadna zaś prosta $P_{2k}Q_{2k}$ nie połowi pola tej figury, ponieważ po jednej stronie takiej prostej leży o dwa dodane odcinki więcej niż po drugiej.

Wreszcie, każda prosta przechodząca przez O i nie przechodząca przez żaden z wyróżnionych punktów dzieli na dwie części jeden z dodanych odcinków koła i ponadto po jednej stronie takiej prostej leży o jeden dodany odcinek koła więcej. Zatem prosta ta nie może połowić pola figury F.