ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1963)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

K. SZYMICZEK (Katowice)

O iloczynach sinusów i cosinusów

W zbiorach zadań z algebry (por. [1], [2], [3]), a także w książce Nowosiołowa [4], wartości iloczynów skończonych sinusów i cosinusów otrzymuje się po uprzednim znalezieniu rozkładów wielomianów x^n-1, $x^{2n}\pm 1$, $x^{2n+1}\pm 1$ na czynniki pierwsze w ciele liczb rzeczywistych. W ten sposób można otrzymać wzory(1)

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=2^{-n+1}\sqrt{n}, \tag{1}$$

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}=2^{-n+1}, \tag{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}=2^{-n+1/2}, \tag{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=2^{-n}\sqrt{2n+1}, \tag{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=2^{-n}\sqrt{2n+1}, \tag{5}$$

$$\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{4\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{2n\pi}{2n+1}=2^{-n}\sqrt{2n+1}, \tag{6}$$

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=2^{-n+1}n, \tag{7}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=2^{-n}, \tag{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\begin{cases}(-1)^{(3n+1)/2}2^{-n} & \text{przy } n \text{ nieparzystym},\\ (-1)^{3n/2}2^{-n} & \text{przy } n \text{ parzystym},\end{cases} \tag{9}$$

(1) Tożsamości (5), (6), (9) nie występują w znanej mi literaturze.

$$(10)\qquad \cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{4\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=\begin{cases}(-1)^{(n+1)/2}\,2^{-n} & \text{przy } n \text{ nieparzystym},\\ (-1)^{n/2}\,2^{-n} & \text{przy } n \text{ parzystym},\end{cases}$$

$$(11)\qquad \cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=(-1)^n\,2^{-2n}.$$

Celem tego artykułu jest udowodnienie tożsamości

$$(12)\qquad \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\sin\frac{(k-j)\pi}{n}=(-1)^{n-k}2^{-n+1}n,$$

gdzie $1\leqslant k\leqslant n$,

$$(13)\qquad \prod_{j=1}^{2n+1}\cos\frac{(k-j)\pi}{2n+1}=(-1)^{n+1-k}\,2^{-2n},$$

z których wynikają dla $k=1$ tożsamości (7) i (11), i wykazanie że z (7) wynikają tożsamości (1)-(6), zaś z (11) tożsamości (8)-(10).

1. Niech $e_1,\ldots,e_n$ oznaczają pierwiastki stopnia $n\geqslant 2$ z jedności. Niech k oznacza ustaloną liczbę naturalną nie większą niż n. Obliczymy wartość iloczynu

$$P=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}|e_k-e_j|.$$

Wykonując mnożenia otrzymujemy

$$P=|e_k^{n-1}-(e_1+\ldots+e_{k-1}+e_{k+1}+\ldots+e_n)e_k^{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}e_1\ldots e_{k-1}e_{k+1}\ldots e_n|.$$

Jak wiadomo ([3], str. 41), wielomiany symetryczne podstawowe n zmiennych są równe zeru dla pierwiastków stopnia n z jedności, z wyjątkiem $e_1\ldots e_n=(-1)^{n-1}$. Mamy więc

$$\sum_{\substack{j\\ j\neq k}}e_j=-e_k,\qquad \sum_{\substack{j_1<j_2\\ j_1\neq k\neq j_2}}e_{j_1}e_{j_2}=-e_k\sum_{\substack{j\\ j\neq k}}e_j=(-1)^2e_k^2,\quad\ldots;$$

$$\sum_{\substack{j_1<\ldots<j_{n-2}\\ j_i\neq k}}e_{j_1}\ldots e_{j_{n-2}}=-e_k\sum_{\substack{j_1<\ldots<j_{n-3}\\ j_i\neq k}}e_{j_1}\ldots e_{j_{n-3}}=(-1)^{n-2}e_k^{n-2};$$

$$e_1\ldots e_{k-1}e_{k+1}\ldots e_n=(-1)^{n-1}e_k^{n-1}$$

i stąd

$$P=|e_k^{n-1}+(-1)^2e_k^{n-1}+(-1)^4e_k^{n-1}+\ldots+(-1)^{2(n-1)}e_k^{n-1}|=|ne_k^{n-1}|=n.$$

Z drugiej strony,

$$P = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \left| \left(\cos\frac{2k\pi}{n} - \cos\frac{2j\pi}{n} \right) + i \left(\sin\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{2j\pi}{n} \right) \right| =$$

$$= \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \left| 2\sin\frac{(k-j)\pi}{n} \left(-\sin\frac{(k+j)\pi}{n} + i\cos\frac{(k+j)\pi}{n} \right) \right| =$$

$$= 2^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \left| \sin\frac{(k-j)\pi}{n} \right|.$$

W ostatnim iloczynie po opuszczeniu znaku bezwzględnej wartości otrzymamy $k-1$ czynników dodatnich, biorąc więc pod uwagę, że $P = n$, otrzymamy tożsamość (12).

Podstawiając w (12) $k = 1$ otrzymujemy tożsamość (7). Z (7) i wzoru redukcyjnego $\sin\frac{k\pi}{2n} = \sin\frac{(2n-k)\pi}{2n}$ wynika tożsamość (1), gdyż dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ mamy stąd

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} =$$

$$= \sin\frac{(n+1)\pi}{2n}\sin\frac{(n+2)\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} = \sqrt{2^{-2n+1}2n} = 2^{-n+1}\sqrt{n}.$$

Tę równość można też otrzymać bezpośrednio z (12). Jeśli bowiem $n = 2m$ oraz $k = m$, to z (12) mamy

$$\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}\ldots\sin\frac{\pi}{2m}\sin\frac{-\pi}{2m}\sin\frac{-2\pi}{2m}\ldots\sin\frac{-m\pi}{2m} =$$

$$= (-1)^m 2^{-2m+1}2m,$$

skąd

$$\left[\sin\frac{\pi}{2m}\sin\frac{2\pi}{2m}\ldots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]^2 = 2^{-2m+2}m,$$

więc także (1). Zamieniając w (7) n na $2n$ otrzymamy

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

skąd wobec (7)

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}=\frac{2^{-2n+1}2n}{2^{-n+1}n}=2^{-n+1},$$

czyli (2). Podstawiając w (1) $n=2m$, otrzymamy

$$2^{-2m+1}\sqrt{2m}=\sin\frac{\pi}{4m}\sin\frac{2\pi}{4m}\ldots\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}=$$

$$=\sin\frac{\pi}{4m}\sin\frac{3\pi}{4m}\ldots\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}\sin\frac{\pi}{2m}\sin\frac{2\pi}{2m}\ldots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}=$$

$$=\sin\frac{\pi}{4m}\sin\frac{3\pi}{4m}\ldots\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}\,2^{-m+1}\sqrt{m},$$

skąd wynika (3). Wobec

$$\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\sin\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}$$

mamy

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{4\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{2n\pi}{2n+1},$$

z (7) zaś wynika, że wspólną wartością tych iloczynów jest

$$\sqrt{2^{-2n}(2n+1)}=2^{-n}\sqrt{2n+1}.$$

Otrzymaliśmy więc tożsamości (5) i (6).

Z tego samego wzoru redukcyjnego dla $k=1,2,\ldots,n$ mamy równość (4), gdyż

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\sin\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\sin\frac{(n+2)\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{2n\pi}{2n+1}$$

i na podstawie (7), wspólną wartością iloczynów jest $2^{-n}\sqrt{2n+1}$. Równość (4) można też otrzymać z (12) dla $n=2m+1$, $k=m+1$.

2. Zachowując oznaczenia części 1 obliczymy wartość iloczynu

$$Q=\prod_{j=1}^{n}|e_k+e_j|,$$

Mamy

$$Q=|e_k^n+(e_1+\ldots+e_n)e_k^{n-1}+\ldots+e_1\ldots e_n|=|1+(-1)^{n-1}|.$$

Tak więc $Q = 0$ przy n parzystym i $Q = 2$ przy n nieparzystym. Z drugiej strony, postępując podobnie jak przy obliczaniu P, otrzymamy

$$Q = 2^{2n+1} \prod_{j=1}^{2n+1} \left| \cos \frac{(k-j)\pi}{2n+1} \right|.$$

W iloczynie tym, po opuszczeniu znaku wartości bezwzględnej, dodatnie są jedynie te czynniki, dla których wskaźnik j spełnia warunek $-\pi/2 < (k-j)\pi/(2n+1) < \pi/2$, skąd $k-n \leqslant j \leqslant k+n$.

Rozpatrujemy teraz dwa przypadki

1° $k \leqslant n$, wtedy ilość naturalnych j spełniających warunek $1 \leqslant j \leqslant k+n$ jest równa $k+n$,

2° $k > n$, wtedy ilość naturalnych j spełniających warunek $k-n \leqslant j \leqslant 2n+1$ jest równa $2n+1-(k-n)+1 = 3n-k+2$,

a więc liczba tych j, dla których odpowiednie czynniki w Q są ujemne jest w przypadku 1° równa $2n+1-(n+k) = n+1-k$, w przypadku 2° jest $2n+1-(3n-k+2) = k-(n+1)$. Tak więc znak iloczynu Q po opuszczeniu znaku wartości bezwzględnej jest identyczny ze znakiem liczby $(-1)^{n+1-k}$; tożsamość (13) została więc udowodniona. Z (13) dla $k = 1$ otrzymujemy tożsamość (11). Ponieważ

$$\cos \frac{k\pi}{2n+1} = -\cos \frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1},$$

więc dla $k = 1, 2, \ldots, n$, otrzymujemy

$$\cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \ldots \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \tag{14}$$

$$= (-1)^n \cos \frac{(n+1)\pi}{2n+1} \cos \frac{(n+2)\pi}{2n+1} \ldots \cos \frac{2n\pi}{2n+1}$$

oraz dla $k = 1, 3, \ldots, 2n-1$

$$\cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{3\pi}{2n+1} \ldots \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \tag{15}$$

$$= (-1)^n \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cos \frac{4\pi}{2n+1} \ldots \cos \frac{2n\pi}{2n+1}.$$

W lewej stronie (14) wszystkie czynniki są dodatnie, zatem z (11) wynika, że wspólną wartością tych iloczynów jest liczba 2^{-n}. Otrzymaliśmy więc równość (8). Wynika ona także z (13) dla $k = n+1$.

W prawej stronie (15) czynników dodatnich jest tyle, ile wskaźników k, dla których $2k/(2n+1) < \frac{1}{2}$, skąd $k \leqslant \frac{1}{2}n$. Zatem czynników dodatnich jest $\frac{1}{2}n$ przy n parzystym, zaś przy n nieparzystym liczba ich wynosi $\frac{1}{2}(n-1)$. Wynikają stąd równości (9) i (10).

Prace cytowane

[1] Д. К. Фаддеев и И. С. Соминский, *Сборник задач по высшей алгебре*, Москва 1956.

[2] N. M. Giunter i R. O. Kuźmin, *Zbiór zadań z matematyki wyższej*, t. II, Warszawa 1959.

[3] L. Jeśmanowicz i J. Łoś, *Zbiór zadań z algebry*, cz. I, Warszawa 1959.

[4] S. I. Nowosiołow, *Specjalny wykład trygonometrii*, Warszawa 1956.