ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1963)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

J. A. GABOWICZ (Tartu)

O rozwiązaniach równania $x^3+y^3+z^3-t^3=1$ w liczbach naturalnych

W. Sierpiński (p. [1], str. 25, pytanie P_{69}^2) wspomina między innymi o następującym nie rozwiązanym zagadnieniu arytmetyki: czy równanie

$$x^3+y^3+z^3-t^3=1 \tag{1}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z, t?

Udowodnimy, że odpowiedź na powyższe pytanie jest twierdząca. W tym celu oprzemy się na tożsamości A. Gérardin'a (p. Dickson [2], str. 564):

$$(9p^2-pq+q^2)^3+(9p^2+pq-q^2)^3+(6pq)^3-(9p^2+pq+q^2)^3 = \\ = (9p^2-pq-q^2)^3. \tag{2}$$

Podstawiając do tożsamości (2) $p=2b$, $q=a-b$ uzyskamy

$$(a^2-4ab+39b^2)^3+(-a^2+4ab+33b^2)^3+[12b(a-b)]^3-(a^2+35b^2)^3 = \\ = (37b^2-a^2)^3. \tag{3}$$

Równanie $37b^2-a^2=1$, czyli

$$a^2-37b^2=-1 \tag{4}$$

ma, jak wiadomo, nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych a, b. Wszystkie je można otrzymać rozkładając $\sqrt{37}$ na ułamek łańcuchowy i biorąc pod uwagę tylko redukty o numerach parzystych.

Wykorzystując (4), tożsamość (3) można napisać w postaci

$$(2c^2+1)^3+(4bc+1)^3+(12bc)^3-[2c(a+b)+1]^3=1, \tag{5}$$

gdzie $c=a-b$. Niech (a_n, b_n) oznacza n-te rozwiązanie równania (4) w liczbach naturalnych, zaś

$$(x_n, y_n, z_n, t_n) \tag{6}$$

odpowiednie rozwiązanie równania (1). Liczby a_n i b_n można otrzymać z wzorów

$$2a_n = (6+\sqrt{37})^{2n-1}+(6-\sqrt{37})^{2n-1},$$

$$2\sqrt{37}b_n = (6+\sqrt{37})^{2n-1}-(6-\sqrt{37})^{2n-1}.$$

Na mocy (5) mamy

$$(7)\qquad \begin{aligned} x_n &= 2(a_n-b_n)^2+1, \qquad y_n = 4b_n(a_n-b_n)+1,\\ z_n &= 12b_n(a_n-b_n), \qquad t_n = 2(a_n^2-b_n^2)+1. \end{aligned}$$

Ponadto, liczby x_n, y_n, z_n, t_n są dodatnie, ponieważ z (4) wynika, że $a_n > b_n$. Zauważmy jeszcze, że między liczbami x_n, y_n, z_n, t_n zachodzą następujące zależności liniowe, które łatwo otrzymać z (7):

$$z_n = 3(y_n-1), \qquad t_n = x_n+y_n-1.$$

Dla $n = 1, 2, 3$ otrzymujemy

n	1	2	3
a_n	6	882	128766
b_n	1	145	21169
x_n	51	1086339	23154228819
y_n	21	427461	9110883563
z_n	60	1282380	27332650686
t_n	71	1513799	32265112381

Prace cytowane

[1] W. Sierpiński, *O stu prostych ale trudnych zagadnieniach arytmetyki*, Warszawa 1959.

[2] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, vol. II, Washington 1920.