ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1963)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

B. W. GNIEDENKO (Moskwa)

Niektóre zagadnienia cybernetyki i statystyki

Uwagi wstępne. W naszych czasach metody matematyczne przeniknęły głęboko wszystkie gałęzie wiedzy. Fizyka i technika, biologia i medycyna, astronomia i chemia, ekonomia i nauki rolnicze, lingwistyka i demografia wykorzystują w mniejszym lub większym stopniu matematykę, posługują się nią przy formułowaniu swych wniosków, a jednocześnie wskazują jej nowe kierunki badań i wpływają na tworzenie się jej nowych gałęzi. Bardzo ogólne zagadnienia, związane z koniecznością badania praw rządzących procesami kierowania skomplikowanymi układami doprowadziły do wyodrębnienia nauki, którą nazwano „cybernetyką". Oczywiście, gdy chodzi o wybór najbardziej racjonalnej metody postępowania, nie można się ograniczyć tylko do rozważań jakościowych i do ogólnych rozumowań. Należy znaleźć optymalną drogę formułując problemy w sposób ścisły i przeprowadzając dokładne obliczenia. W przeciwnym razie nie uda się uniknąć subiektywnych ocen, a wraz z nimi, bezwartościowych dyskusji. Zatem metody matematyczne stanowią naturalną i niezbędną część składową cybernetyki.

Historia matematyki uczy, że każdy nowy dział jej zastosowań staje się źródłem nowych zagadnień matematycznych i przez to powoduje powstawanie nowych kierunków badań. Było tak na przełomie XVII i XVIII wieku, gdy rozwój produkcji przemysłowej postawił przed nauką zadanie zbadania procesów zmian, procesów ruchu. Matematyka odpowiedziała na to stworzeniem analizy matematycznej. Podobnie, pilna potrzeba zbadania praw rządzących rozchodzeniem się ciepła, wynikająca częściowo z burzliwego rozwoju stosowania maszyn parowych w przemyśle, doprowadziła do powstania nowej gałęzi matematyki — fizyki matematycznej. Również obecnie jesteśmy świadkami powstawania nowych działów matematyki. Aby się o tym przekonać, wystarczy przypomnieć takie nowe terminy, jak teoria informacji, programowanie liniowe i nieliniowe (dynamiczne), teoria automatów, teoria masowej obsługi, teoria niezawodności, programowanie elektronowych maszyn liczących. Silny bodziec rozwoju uzyskało jednocześnie wiele od dawna istniejących gałęzi matematyki — w pierwszym rzędzie logika matematyczna, statystyka matematyczna, teoria prawdopodobieństwa, teoria równań róż-

niczkowych. Podczas gdy około 20 lat temu uważano, że logika matematyczna pozostaje daleko od zastosowań praktycznych, to obecnie słusznie się uznaje, że wysunęła się ona na pierwszy plan i znajduje szerokie zastosowanie przy rozwiązywaniu wielu aktualnych problemów.

Zauważmy, że cybernetyki nie można uznać za naukę matematyczną. Wykorzystuje ona jedynie w dużym stopniu matematykę jako metodę badań, a w szczególności stale stosuje metodę matematycznego modelowania przy badaniu takich zjawisk, dla których dotychczas nie umiemy jeszcze zbudować zadowalającej teorii ilościowej.

W niniejszym artykule ograniczymy się do pokazania, jak przy stawianiu pewnych zadań z cybernetyki nieuchronnie powstaje potrzeba matematycznego ich opisu. Nie będziemy się przy tym starali podawać treści wszystkich działów matematyki znajdujących zastosowanie w cybernetyce, ani ocenić ich znaczenia.

Wiadomo, że powstanie elektronowych maszyn liczących uczyniło wykonalnymi takie obliczenia, które przedtem uważano za niemożliwe do przeprowadzenia z powodu zbyt wielkiej liczby potrzebnych operacji. Jeszcze większe znaczenie maszyn polega na tym, że można ich użyć do wykonywania szeregu operacji logicznych, w szczególności operacji kierowania przebiegiem procesów produkcyjnych. Oczywiście, że zanim powierzy się maszynie kierowanie jakimś procesem, należy zbadać jego cechy szczególne, ustalić jakie operacje i w jakiej kolejności maszyna winna wykonywać w różnych okolicznościach, a także jakie informacje należy przekazywać maszynie, by mogła ona w każdej chwili kontrolować przebieg procesu i móc podejmować uzasadnione decyzje. W tej sytuacji szczególne znaczenie ma przeprowadzenie analizy logicznej kierowanego procesu i wobec tego dużą rolę odgrywają tu metody logiki matematycznej. Celem ustalenia, jakie informacje o kierowanym układzie i w jakiej postaci są niezbędne dla racjonalnego sterowania nim, należy posługiwać się statystyką matematyczną i teorią informacji.

Oczywiście, stosowanie aparatu matematycznego powinno być poprzedzone dokładnym zbadaniem istotnej treści zjawiska, związanej z właściwościami kierowanego procesu i ze sposobem kierowania. Dlatego właśnie nieraz do pozornie podobnych zjawisk musimy stosować odmienne metody matematyczne, używać innych sposobów rozwiązywania i nowych schematów matematycznych.

W niniejszym artykule autor nie omawia wielu ważnych zagadnień, a porusza głównie te, którymi sam się zajmował. Wywiera to zrozumiały wpływ na treść artykułu.

Zagadnienia związane z diagnostyką medyczną. Z zagadnieniem polegającym na prędkim i dokładnym określeniu choroby stykano się już w najdawniejszych czasach. Niemniej jednak, do ostatnich lat jego

rozwiązywanie nie miało niczego wspólnego z matematyką. Wydawało się, że przy ocenie choroby lekarz może się opierać wyłącznie na własnej intuicji i na tysiącletnich doświadczeniach medycyny. Niewątpliwie, wyjątkowo cenne informacje daje lekarzowi poznanie życia chorego, rodzaju wykonywanej przezeń pracy, historii choroby, a także ogólne wrażenie, jakie odnosi on z oględzin chorego. Wiadomo też, że takie informacje jednemu lekarzowi wystarczają całkowicie do wysnucia uzasadnionych wniosków, a dla innego są tylko zbędnym balastem, służącym wyłącznie do opisania historii choroby. Co więcej, identyczne informacje dotyczące tego samego chorego często pozwalają różnym, nawet doświadczonym lekarzom, wysnuwać zupełnie odmienne wnioski.

Gdy w r. 1956 wraz z mymi współpracownikami z Instytutu Matematycznego AN USSR zainteresowaliśmy się zagadnieniami diagnostyki medycznej i badaliśmy możliwości wykorzystania przy tym współczesnych szybkich elektronowych maszyn liczących, dyskutowaliśmy wielokrotnie z lekarzami. Interesowało nas pytanie: jak postępuje lekarz przy stawianiu diagnozy? Często otrzymywaliśmy mniej więcej taką odpowiedź: „Przy określaniu choroby nie postępujemy według jakiejś jednej ustalonej metody, gdyż istnieje bardzo wiele chorób i różnych ich objawów, a niekiedy nawet z pozornie jednakowych objawów musimy wyciągać odmienne wnioski. W dużym stopniu wykorzystujemy naszą wiedzę i intuicję lekarską, którą powinien posiadać każdy dobry lekarz". Inne odpowiedzi miały bardziej określony charakter: „Każdy lekarz zaczyna od zewnętrznego zbadania chorego i wypytania go o objawy choroby. Nieraz już takie mało uchwytne fakty, jak na przykład sposób wchodzenia chorego do gabinetu lekarza, pozwalają określić chorobę. Gdy jednak takie wstępne informacje są niedostateczne, to zapoznanie się z historią choroby, wysłuchanie, na co się chory uskarża, zbadanie go, informacja o przebytych uprzednio chorobach, przeprowadzenie analiz, obserwacja szpitalna — pozwalają odrzucić wiele przypuszczeń i skupić uwagę na stosunkowo małej liczbie możliwych chorób. W każdym razie nie przeprowadzamy żadnych obliczeń, ale wiemy z praktyki, nawet jeśli dane objawy występują w związku z rozmaitymi chorobami, że w większości wypadków mieliśmy do czynienia z konkretną chorobą. Oczywiście w najprostszych przypadkach każdy lekarz postawi właściwą diagnozę. Jednak w sytuacjach bardziej skomplikowanych niezbędne są dodatkowe badania i potrafimy tym trafniej określić chorobę, im więcej informacji o chorym uzyskamy. Omyłki lekarskie są z reguły wynikiem zbyt pośpiesznego wysuwania wniosków".

Druga odpowiedź daje, oczywiście, pełniejszy opis rozumowania lekarza przy stawianiu diagnozy. Opiera się on na doświadczeniu własnym oraz całej medycyny. Przez doświadczenie medycyny należy rozumieć przede wszystkim jakościowe (a być może również częściowo ilościowe)

opracowanie olbrzymiego materiału statystycznego. Obserwacja dużej liczby chorych umożliwia poznanie względnej częstości występowania objawów danej choroby, jak również częstości występowania różnych chorób przy danym zespole objawów. W medycynie jednak wnioski z obserwacji nie są formułowane w postaci wyników liczbowych, przyjęto natomiast określać częstość słowami: „z reguły", „w większości wypadków", „bardzo rzadko" itp.

W naszych czasach podobne określenia słowne w fizyce, chemii czy technice możliwe są jedynie przy wstępnym zapoznawaniu się z badanym zjawiskiem. Niewątpliwie również w medycynie dla uzyskania ścisłych wniosków niezbędne są pełniejsze dane ilościowe następującego rodzaju: przy występowaniu danego zespołu objawów prawdopodobieństwo choroby B_1 wynosi 0,98, choroby B_2 — 0,37, a choroby B_3 — zaledwie 0,02. Dlatego właśnie zaczęliśmy szukać w literaturze danych tego typu. Doznaliśmy jednak niepowodzenia. Albo dane liczbowe były oparte na zbyt skromnym materiale faktycznym, albo opracowanie materiału było całkowicie niezadowalające i cały materiał liczbowy, zebrany z dużym nakładem pracy, tracił swą wartość. Zrozumiałe są trudności stojące na drodze do uzyskania uzasadnionych danych ilościowych tego typu. Jesteśmy jednak przekonani, że dalszy rozwój medycyny doprowadzi nie tylko do konieczności zebrania danych statystycznych, ale również do ich prawidłowego statystycznego opracowania i uzyskania na tej podstawie różnych wniosków ilościowych i jakościowych.

W szczególności można tą drogą otrzymać oszacowanie prawdopodobieństwa różnych zjawisk mających znaczenie dla diagnostyki, higieny sanitarnej, bezpieczeństwa i higieny pracy itp. W ten właśnie sposób można będzie obiektywnie ocenić znaczenie różnego rodzaju zespołów objawów, obiektywnie porównać jakość różnych metod diagnostycznych i sposobów leczenia. Wszystko to powinno wciągnąć do pracy w medycynie wykwalifikowanych specjalistów z zakresu teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.

Statystyka matematyczna i probabilistyczny sposób myślenia przy stawianiu diagnozy winny wywalczyć sobie pełne prawa bytu w medycynie, zarówno w teorii medycznej, jak i w praktyce. Należy do tego dążyć nie tylko dla uzyskania zewnętrznych efektów, ale również dla lepszego poznania rzeczywistości. Niewątpliwie, istotną pomoc może tu okazać logika matematyczna. Zastosowanie jej zapewni co najmniej większą precyzję sformułowań oraz przezwyciężenie subiektywizmu panującego jeszcze w diagnostyce.

Naszkicowane powyżej zadanie jest jednym z wielu, które stawia medycyna i które wymagają pilnego rozwiązania. Biorąc pod uwagę, że wśród obiektywnych danych uwzględnionych przez lekarzy przy stawianiu diagnoz są elektrokardiogramy, fonokardiogramy, balistogramy

itp., tj. zapisy realizacji procesów przypadkowych (stochastycznych), musimy dojść do wniosku, że niezbędne jest statystyczne opracownie danych medycznych i to polegające nie tylko na obliczaniu średnich i wariancji, ale również na zastosowaniu bardziej skomplikowanych metod. W szczególności, wobec tego, że obieg krwi możemy rozpatrywać jako proces stacjonarny, omawiane wyżej obiektywne dane (przynajmniej z pewnym dostatecznie dobrym przybliżeniem) są realizacjami stochastycznych procesów stacjonarnych. Nie można więc już twierdzić, że medycyna może ograniczyć się do korzystania z wąskiego zakresu metod statystycznych. Przeciwnie, kontakt z rzeczywistymi zadaniami praktyki lekarskiej wskazuje dobitnie na to, że współczesna medycyna wymaga racjonalnego wykorzystania całego zasobu metod wypracowanych przez statystykę matematyczną.

Przytoczone powyżej poglądy przyjęliśmy w naszym niewielkim kolektywie za podstawę do prób zastosowania metod matematycznych w diagnostyce. Szliśmy w naszych badaniach wraz z inżynierami i lekarzami kilkoma drogami, które wzajemnie się uzupełniały. Staraliśmy się, z jednej strony, wykryć logiczne przesłanki i wnioski, którymi kieruje się lekarz przy określaniu choroby. Z drugiej strony, usiłowaliśmy ocenić znaczenie statystyczne poszczególnych objawów oraz zespołów objawów uwzględnianych przy stawianiu diagnozy. Były równocześnie opracowywane rozmaite czujniki i urządzenia diagnostyczne. Ułożono programy dla rozwiązywania zadań diagnostyki przy pomocy elektronowej maszyny liczącej i za pomocą tych programów stawiano diagnozy rzeczywistym chorym. Wreszcie, na tej podstawie zbudowano pierwszy wariant maszyny diagnostycznej. Do maszyny wprowadzono zaobserwowane objawy choroby serca, a maszyna albo stawiała diagnozę, albo wskazywała na konieczność przeprowadzenia dodatkowych badań. W szeregu przypadków maszyna stawiała jednemu choremu nie jedną diagnozę, lecz kilka możliwych.

Sprawdzenie działania maszyny na rzeczywistych chorych pokazało, że pierwotny schemat stawiania diagnozy, na którym opieraliśmy się, był niedoskonały nie tylko dlatego, że uwzględniał zbyt mało objawów, ale również dlatego, że zakładał on, iż maszynie podaje się tylko zaobserwowane objawy choroby, podczas gdy w rzeczywistości nie mniejszą rolę grają te objawy, które nie wystąpiły.

Nasze pierwsze doświadczenie, mimo swej niedoskonałości pokazało, że wykorzystanie matematyki, a przede wszystkim matematycznego sposobu myślenia, może przynosić korzyści już na tak prymitywnym etapie, na którym zaczynaliśmy nasze prace. Maszyna diagnostyczna wzbudziła zainteresowanie lekarzy i otrzymaliśmy wiele propozycji budowy podobnych maszyn do badania i stawiania diagnoz innych chorób. Jednocześnie szereg lekarzy, których uważaliśmy za zdecydowanych przeciw-

ników matematyki, przejawiło wyjątkowe zainteresowanie naszymi pracami i zaproponowało swą współpracę w przyszłości. Okazało się, że maszyna diagnostyczna nawet w swej pierwotnej postaci może być wykorzystywana przy kształceniu studentów medycyny. W pewnym sensie jest ona dla studenta medycyny wzorcem minimum umiejętności. Ciekawe jest, że po umieszczeniu w pamięci maszyny historii prawie dwudziestu chorób w pewnym przypadku postawiła ona dwie diagnozy jednemu choremu. Z jedną diagnozą zgodzili się jednogłośnie obecni przy tym lekarze pracujący w różnych szpitalach Kijowa, natomiast drugą również jednogłośnie odrzucili. Jednak w toku dalszej dyskusji wyjaśniło się, że druga możliwość, którą wskazała maszyna, nie jest wykluczona i jedynie uszła uwagi obecnych.

Zamierzamy dalej doskonalić maszynę diagnostyczną w taki sposób, aby otrzymywała ona dane wyjściowe bezpośrednio od chorego przy pomocy układu czujników i urządzeń diagnostycznych, i aby zaledwie część informacji, dotycząca zewnętrznego wyglądu chorego, była podawana z opisu historii choroby.

Zagadnienia wykorzystywania metod matematycznych i elektronowych maszyn liczących w diagnostyce skupiają obecnie uwagę wielu zespołów badawczych zarówno w ZSRR, jak i poza jego granicami. W szeregu czasopism ukazały się godne uwagi artykuły na ten temat. Z przyjemnością podkreślam fakt, że w dwóch artykułach autorów amerykańskich, R. S. Ledley i L. B. Lusted [1], [2], wyłożone są te same poglądy, którymi kierował się nasz mały kolektyw.

Nie jest, być może, rzeczą zbędną zauważyć, że obecnie, w związku z zadaniami opanowywania kosmosu, omówione wyżej zagadnienia nabierają szczególnego znaczenia. Tu bardziej niż w jakiejkolwiek innej dziedzinie ma doniosłe znaczenie uzyskiwanie wyczerpujących informacji z zewnątrz i automatyczne ich rozszyfrowywanie. Nie nakłada się przy tym ograniczeń na objętość przesyłanych informacji.

Zagadnienia organizacji produkcji i problemy teorii masowej obsługi. Jedną z cech charakterystycznych współczesnej produkcji przemysłowej jest jej masowość. Z jednej strony, wytwarza się wiele wyrobów, a z drugiej — przy ich produkcji wykonuje się wiele czynności w określonym porządku. Każda czynność zajmuje przeciętnie określoną ilość czasu. Często powstaje konieczność obliczenia liczby mechanizmów potrzebnych na każdym etapie obróbki. Grube oszacowanie polega na porównaniu średniej wydajności zespołu mechanizmów wykonujących jedną czynność, ze średnią wydajnością mechanizmów wykonujących inną. Jednak takie powierzchowne obliczenia rzadko dają zadowalające wyniki i prowadzą nieraz do poważnych uchybień. Znane są na przykład w praktyce światowej przypadki, gdy budowano specjalne elektrownie do zasilania

urządzeń w szybach i obliczano ich moc sumując moce zainstalowanych urządzeń. Praktyka wykazała błędność takich obliczeń; nie można było w pełni wykorzystać mocy elektrowni, gdyż przy normalnej pracy zespołu urządzeń okazało się, że potrzebują one mniejszej mocy, niż to wynikało z takich prymitywnych obliczeń. Przyczyna tego zjawiska jest niemal oczywista: każde urządzenie ma określony cykl pracy, w ciągu którego pobierana moc ulega zmianie. Długość trwania cyklu też nie jest stała, lecz podlega wielu dosyć dużym przypadkowym odchyleniom. Jest to spowodowane przez wiele czynników: niejednorodność obrabianego materiału, zmiany napięcia, wahania temperatury, stan urządzenia itd. Ponadto pobierana moc zmienia się w zależności od cyklu, a zatem w każdej chwili t jest ona wielkością losową $P(t)$. Całkowita moc pobierana przez wszystkie urządzenia stanowi więc sumę wszystkich takich wielkości. Przy dodawaniu maksymalne obciążenia jednych urządzeń będą się nakładały na małe i średnie obciążenia innych. W wyniku rzeczywista ilość potrzebnej mocy będzie znacznie mniejsza, niż suma nominalnych mocy wszystkich włączanych urządzeń.

Dla gospodarki narodowej olbrzymie znaczenie ma zagadnienie racjonalnego obliczania popytu zakładów przemysłowych na energię elektryczną. Pisano już nieraz (p. np. [3]) że racjonalne metody obliczeń w skali naszego kraju mogą doprowadzić do dużych oszczędności metali kolorowych, które są teraz bez uzasadnienia zużywane do produkcji kabli i transformatorów zbyt wielkich mocy. Widzimy więc, że optymalne zarządzanie zasobami w zakresie energetyki wiąże się z koniecznością stosowania metod matematycznych. W przytoczonym przykładzie spotykamy się z zastosowaniem metod statystyki matematycznej i teorii procesów stochastycznych [4]. Jednocześnie stykamy się tu z innym zagadnieniem: Jak często zdarza się, że pewna duża liczba urządzeń pobiera równocześnie maksymalną moc, powodując w ten sposób przeciążenie kabli zasilających?

W wielu dziedzinach praktycznej działalności spotykamy obecnie podobne zagadnienia; systematyczne ich rozwiązywanie doprowadziło do wyodrębnienia nowej gałęzi nauki zwanej teorią masowej obsługi, albo, jak ją nazywają poza Związkiem Radzieckim, teorią kolejek.

W latach trzydziestych w związku z automatyzacją przemysłu nastąpiło przejście do obsługiwania kilku obrabiarek przez jednego robotnika. Obrabiarki w przypadkowych momentach czasu z powodu różnych przyczyn przestają normalnie pracować i wymagają ponownego uruchomienia przez obsługującego je robotnika. Długość trwania pracy obrabiarki po uruchomieniu, na ogół biorąc, nie jest stała, lecz jest wielkością losową. Pytanie polega na tym, jak często, przy ustalonych warunkach pracy, dana liczba obrabiarek (spośród wszystkich powierzonych jednemu robotnikowi) będzie czekać na uruchomienie? Powstają dalsze naturalne

pytania o dużym znaczeniu dla praktyki: Jaki jest średni czas postoju obrabiarek przy danej ich ilości powierzonej dozorowi robotnika? Ile obrabiarek z ekonomicznego punktu widzenia należy przydzielać jednemu robotnikowi? Jak jest zużywany czas pracy robotnika i obrabiarek przy ustalonej metodzie obsługi? Co jest lepsze: Czy gdy jeden robotnik obsługuje n obrabiarek, czy gdy s robotników — ns obrabiarek?

Przy organizacji produkcji taśmowej i linii zautomatyzowanych powstaje wiele zagadnień zbliżonych do omawianych wyżej. Na jednym z nich się zatrzymamy. W celu zabezpieczenia ciągłości pracy wszystkich obrabiarek, w przypadku, gdy pewna ich grupa ulega awarii i przestaje zaopatrywać linię w swoje wyroby, umieszcza się przy obrabiarkach zasobniki gromadzące zapas wyrobów, które przeszły poprzednie etapy produkcji i oczekują na obrobienie przez daną obrabiarkę. Jakie zapasy wystarczą dla zabezpieczenia ciągłości pracy linii?

Zagadnienia związane z obliczaniem pojemności zasobników mają znacznie ogólniejszy charakter; występują nie tylko przy zabezpieczaniu ciągłości pracy linii zautomatyzowanych. Podobną sytuację spotykamy przy obliczaniu ciągłości magazynów, a także przy ustalaniu sensownej ilości zapasów detali i części maszyn niezbędnych do normalnej eksploatacji posiadanego parku maszynowego. Oto przykład ważnego zagadnienia, które stale wysuwa praktyka: w bazie samochodowej (mówimy tak dla ustalenia uwagi; równie dobrze można mówić o lotnisku, szybie itp.) mamy skład zaopatrzenia materiałowego. Ile i jakich części zamiennych musimy dostarczyć do składu na początku roku, by mieć dostatecznie dużą pewność, że w ciągu dwunastu miesięcy posiadane urządzenia utrzymywane będą w stanie zdatnym do użytku?

Obecnie wielu badaczy pracuje nad obliczeniami związanymi z pracą linii zautomatyzowanych. Zadania te napotykają szereg trudności rachunkowych, które nieraz uniemożliwiają otrzymanie wzorów w wyniku obliczeń. W takich przypadkach modeluje się proces pracy linii zautomatyzowanej i na tej drodze uzyskuje się niezbędne dane. Podamy tylko zasadnicze rysy takiego modelowania w nadzwyczaj schematycznej postaci i nie będziemy objaśniać wielu istotnych szczegółów. Zauważymy tylko, że przy modelowaniu przez cały czas stosuje się równolegle logikę matematyczną i teorię masowej obsługi.

Zbiór wszystkich wyrobów, które trafiają na pierwszą obrabiarkę po obróbce rozpada się na dwie części: Do pierwszej zaliczamy te z nich, które są zdatne do dalszej obróbki, a do drugiej — braki. Tę drugą część wyłączamy z procesu dalszej obróbki. Aby zespół obrabiarek pracował bez zrywów i nieprodukcyjnych przestojów, należy ustalić racjonalnie liczbę obrabiarek w tym zespole i pojemność zasobników dla zapasowych wyrobów.

W związku z tym, że metoda modelowania znajduje szerokie zastosowanie w cybernetyce, rozpatrzymy dokładniej zagadnienie modelowa-

nia pracy linii zautomatyzowanej. Będziemy zakładali, że surowiec musi przejść przez etapy obróbki $A_1, A_2, \ldots, A_n$, aby stać się gotowym wyrobem. Obróbka na etapie A_s trwa γ_s czasu i ta wielkość zależy od wielu przypadkowych czynników. Rozkład prawdopodobieństwa wielkości (zmiennej losowej) γ_s określony jest przez jej dystrybuantę, którą oznaczymy przez $F_s(t)$. Na każdym etapie obróbki możliwe jest powstanie braku, który nie podlega dalszej obróbce; na etapie A_s prawdopodobieństwo powstania braku wynosi p_s. Jaka jest wydajność pracy takiej linii zautomatyzowanej? Ile obrabiarek winno wykonywać daną operację w procesie obróbki? Jaką objętość winny mieć zasobniki przy każdej obrabiarce? Jak rozdzielać pracę po każdej operacji między obrabiarki pracujące na następnym etapie? Sytuacja jeszcze bardziej się skomplikuje, gdy uwzględnimy możliwość awarii obrabiarek na każdym etapie, zmiany stanu narzędzi, wypełnienie zasobników (trzeba zdecydować, gdzie kierować w tym przypadku napływające wyroby) itp. Przy zautomatyzowanej produkcji dane tego typu winny napływać do układu kierującego, podobnie jak i dane o jakości surowca, jakości pracy wykonywanej na każdym etapie itp.

Jak będzie pracowała linia zautomatyzowana opracowana na razie tylko na papierze? Pytanie to nieustannie niepokoi twórców nowych urządzeń. Obecnie nie ma już potrzeby konstruowania doświadczalnego egzemplarza lub metalowego modelu, aby uzyskać odpowiedź na to pytanie. Można zbudować model matematyczny przebiegu procesu pracy linii zautomatyzowanej i wypróbować go przy pomocy elektronowej maszyny liczącej. W tym celu układa się program uwzględniający każdą operację występującą w procesie obróbki. Przypadkowy czas trwania takiej operacji określa się przy pomocy generatora liczb przypadkowych (losowych). Zwykle opracowuje się rozkład jednostajny, a następnie przekształca się go w potrzebną nam wielkość losową o danym rozkładzie prawdopodobieństwa. Uwzględnia się też odrzucanie po każdej operacji braków, powstających z określonym prawdopodobieństwem. Bierze się pod uwagę również możliwość awarii obrabiarki i ponownego jej uruchomienia po upływie losowej ilości czasu o dystrybuancie $H(t)$. Na wyjściu uzyskamy wszystkie niezbędne dane o pracy linii. Rozumie się samo przez się, że każdy cykl produkcyjny zależy od wielu przypadkowych czynników i z przebiegu jednego cyklu nie można wyciągać wniosków o jakości pracy linii i poszczególnych jej części. Musimy więc wprowadzać ten program do maszyny kilka razy i w ten sposób oceniać pracę linii w ciągu długiego okresu czasu. Szybkie maszyny liczące umożliwiają zbadanie jednego cyklu w ciągu bardzo krótkiego okresu czasu i w ciągu kilku minut realizują wielokrotnie cykl produkcyjny linii. Z programami tego typu można się zapoznać z artykułów w czasopismach oraz książce [5].

Schematy modelowania matematycznego wykorzystywane do budowy modeli działania linii automatycznych mogą być prawie bez zmiany stosowane w wielu innych zadaniach pozornie bardzo odległych pod względem swej treści od zadań produkcyjnych. Tak więc w ciągu ostatnich lat opracowano zagadnienia planowania gospodarki narodowej w zakresie całego kraju, okręgu gospodarczego, gałęzi przemysłu, pojedynczego przedsiębiorstwa. Zbudowano schematy procesów fizjologicznych. Na tej właśnie drodze przeprowadzono obliczenia związane z wieloma zadaniami fizyki i mechaniki. Zauważymy jeszcze, że we wspomnianej wyżej książce [5] przytoczony jest schemat obliczeń związanych z pracą reaktora atomowego.

Zagadnienia statystyczne dotyczące niezawodności układów kierujących. Obecnie przed układami kierującymi stawia się wyjątkowo odpowiedzialne zadania i drobna awaria takiego układu może doprowadzić do znacznych strat materialnych, do niewykonania postawionych zadań, a nawet do ofiar w ludziach. Istotnie, jeśli przestanie pracować maszyna elektronowa kierująca procesami zachodzącymi w piecu hutniczym, to może to doprowadzić do awarii pieca. Jeśli system sterujący zastosujemy do kierowania pracą reaktora atomowego, to ustanie pracy tego systemu może spowodować znaczne szkody. Podobnie, awaria urządzenia kierującego dużym systemem energetycznym spowoduje nie tylko znaczne straty produkcyjne, ale również przerwę w zaopatrzeniu w energię stacji pomp, szpitali, sal operacyjnych itd. Dlatego właśnie z każdym rokiem wzrasta znaczenie zapewnienia możliwości bezawaryjnej pracy urządzeń sterujących i ich niezawodności w pracy. Stąd wyjątkowe znaczenie wyjaśnienia przyczyn powodujących złą jakość wyrobów jak również niedoskonałość pracy systemów sterujących. Ponadto powstają zagadnienia zapewnienia niezawodności pracy układów zbudowanych z niedoskonałych części. Powstaje więc konieczność stworzenia teorii niezawodności.

Wiele przyczyn może powodować błędy w działaniu systemów sterujących. Wskażemy tylko na kilka z nich: niewykonywanie czynności przez poszczególne elementy z powodu ich „śmierci", chwilowe przybranie przez pewne parametry wartości spoza dopuszczalnego zakresu, zniekształcenie napływających informacji o stanie kierowanego systemu, co powoduje błędną reakcję układu kierującego.

Celem zapewnienia większej wiarogodności uzyskiwanych informacji, stosuje się kilka sposobów: przekazuje się zbędne informacje, dubluje się przekazywanie informacji, opracowuje się specjalne metody kodowania informacji utrudniające powstawanie zniekształceń. Oczywiście powstają przy tym pewne dodatkowe trudności; wskażemy na razie tylko na jedną z nich: zwiększenie obciążenia środków łączności i przez to skomplikowanie ich budowy. Opracowanie metod kodowania utrudniają-

cych powstawanie zniekształceń urosło obecnie do obszernej dziedziny badań i stanowi już duży dział teorii informacji.

Zagadnieniom budowy niezawodnych układów z niedoskonałych części poświęcono w ostatnich latach wiele prac. W większości przedstawionych rozwiązań proponuje się komplikację urządzeń, zastosowanie zapasowych elementów, które przystępują do pracy albo równocześnie z zasadniczymi, albo natychmiast po ich uszkodzeniu. Po pierwszych pracach J. Neymanna [6] i C. E. Shannona [7] wielu autorów pracuje nad tymi zagadnieniami. Z tematem tym jest też związana literatura dotycząca teorii gromadzenia zapasów.

Liczne obserwacje dowiodły niezbicie, że czas bezawaryjnej pracy elementu jest wielkością losową. Elementy pochodzące z jednej serii, przechowywane w jednakowych warunkach i pracujące dokładnie w tej samej sytuacji są zdatne do użytku w ciągu różnych okresów czasu. Ta rozmaitość czasów „życia" elementów jest wyjątkowo duża i waha się w granicach od kilku do dziesiątków tysięcy godzin. Wielki materiał statystyczny zgromadzony w wyniku eksploatacji różnych wyrobów, jak również dane ze specjalnie przeprowadzonych badań dowiodły ponad wszelką wątpliwość, że prawie wszystkie wyroby cechuje powstawanie awarii w następujący sposób: w początkowym okresie pracy prawdopodobieństwo awarii jest stosunkowo duże, następnie gwałtownie zmniejsza się i przez dłuższy czas przyjmuje prawie jednakową wartość, by potem znów wzrastać. Zwróćmy uwagę na to, że struktura tej sytuacji jest zadziwiająco podobna do znanej z demografii krzywej zgonów. Tam również można zaobserwować zwiększoną śmiertelność dzieci, następnie prawie stałe prawdopodobieństwo zgonu w wieku dojrzałym i nowy wzrost prawdopodobieństwa śmierci osób w wieku starszym. W tej sytuacji może nasunąć się myśl, by wykorzystać dobrze opracowaną matematyczną teorię śmiertelności do zagadnień niezawodności elementów.

Często mamy do czynienia z układem dużej ilości elementów, z których każdy może ulec awarii niezależnie od pozostałych. W ciągu ostatnich lat zbadano pewne ogólne prawa ulegania awarii przynajmniej jednego elementu w ciągu danego czasu. Mianowicie przy pewnych bardzo ogólnych założeniach prawdopodobieństwo tego, że w ciągu czasu T w układzie nastąpi dokładnie k awarii poszczególnych elementów, podlega tzw. prawu Poissona:

$$P_k(T) = \frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!}.$$

Tu $\lambda > 0$ jest pewną stałą, która charakteryzuje jakość naszego układu, mianowicie λ jest równe średniej liczbie awarii w jednostce czasu. Odcinki czasu bezawaryjnej pracy są przy tym rozmieszczone w całkiem okre-

ślony sposób, mianowicie prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy przez czas co najmniej T wynosi $e^{-\lambda T}$.

W naturalny sposób powstaje zadanie sprawdzenia, w jakim stopniu powyższy ogólny schemat odpowiada rzeczywistości. Ogólne bowiem założenia, na których opiera się teoria, odbiegają nieco od rzeczywistych warunków, w których układ musi pracować. Na przykład podczas pracy elektronowej maszyny liczącej wszystkie jej elementy równocześnie mają podwyższoną temperaturę. Już to dowodzi, że w rzeczywistości nie ma całkowitej niezależności między elementami. Są jednak podstawy, aby uznać, że powyższy wynik zachowa moc również, gdy elementy pracują w warunkach niezbyt dużej zależności. Ponadto dane doświadczalne, którymi rozporządzamy, wskazują dostatecznie przekonywająco na to, że rozkład awarii układów złożonych z dużej liczby elementów w istocie dobrze odpowiada schematowi rozkładu Poissona.

W rzeczywistych układach mamy nieraz do czynienia z niezbyt dużą liczbą elementów. Jak bardzo będzie odbiegał rzeczywisty rozkład awarii od prawa Poissona? Niedawno uzyskano dokładne oszacowania tych odchyleń. Nie będziemy przytaczali odpowiednich wzorów. Stwierdzimy jedynie, że przy małej liczbie elementów uzyskane wyniki faktyczne w znacznym stopniu są zbliżone do wyników rozważań teoretycznych.

Wrócimy znów do zagadnień gromadzenia zapasów i rozpatrzymy kilka zadań i ogólnych wyników. Przypuśćmy, że trzeba zaopatrzyć system kierujący w zapasowe części. Czy lepiej będzie posiadać w zapasie drobne elementy, czy większe ich zespoły? Jeśli mamy całkowitą pewność niezawodności połączeń, to okazuje się, że przy dowolnym sposobie rozkładu prawdopodobieństwa długości życia elementów lepiej jest zaopatrywać system kierujący w małe zespoły części niż w większe. Jeszcze lepsze byłoby oczywiście zaopatrzenie się w poszczególne zapasowe elementy. Inny wynik możemy otrzymać w przypadku, gdy układ połączeń może zawieść. Wtedy może powstać również taka sytuacja, w której wygodniej będzie zaopatrzyć się w duże zespoły zapasowych części.

W wielu urządzeniach ogromną rolę gra nie tylko zabezpieczenie dostatecznej niezawodności, ale wypełnienie także innych dodatkowych warunków. Na przykład dla aparatury lotniczej duże znaczenie ma zmniejszenie jej ciężaru oraz to, by zajmowała ona możliwie mało miejsca (by jej objętość nie przekraczała danej objętości) lub też, aby ogólne koszty urządzenia nie przekraczały danej sumy. Wobec takich dodatkowych warunków powstaje zagadnienie najlepszego zaopatrzenia w części zapasowe przy uwzględnieniu niezbędnych ograniczeń. Prowadzi to do rozpatrywania oryginalnych zadań wariacyjnych.

*

* *

Teoria niezawodności przeżywa burzliwy rozwój. Powstają liczne nowe zagadnienia wymagające zastosowania nie tylko typowych metod badawczych, ale i opracowania nowych. Ponieważ zagadnienia niezawodności są związane ze zdarzeniami losowymi, przy ich rozwiązywaniu podstawową rolę grają metody statystyczne. Pogląd ten obecnie uważa się za panujący. Ale to nie wyłącza, a przeciwnie zakłada, że w żadnym wypadku nie wolno tracić z pola widzenia zadań fizycznych związanych z zabezpieczeniem niezawodności elementów i ich układów.

Zagadnienia optymalnego planowania. Ostatnie zagadnienie, rozpatrzone pobieżnie w poprzednim paragrafie, należy do zakresu badań, które po ukazaniu się prac L. W. Kantorowicza (1939 r.) przeżywają burzliwy i wszechstronny rozwój. Zespół zagadnień omawianych w tych pracach, a także metod ich rozwiązywania, wyodrębnił się jako duża i ciekawa gałąź matematyki. Nosi ona nazwę programowania liniowego i nieliniowego (dynamicznego). L. W. Kantorowicz proponował nazwać ją teorią optymalnego planowania. Wydaje mi się, że ta ostatnia nazwa lepiej oddaje istotę rzeczy. Zapoznanie się w ogólnych zarysach z tym kręgiem zagadnień rozpoczniemy od wspomnianego wyżej problemu z teorii niezawodności.

Należy zaopatrzyć się w zapasowe części pewnego urządzenia złożonego z bloków $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tak, aby przy wadze całości nie przekraczającej danej wielkości P uzyskać maksymalną niezawodność całego urządzenia. Oznaczając odpowiednio przez $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ilości bloków typu $B_1, B_2, \ldots, B_n$, a przez $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — odpowiednio ich ciężar, będziemy mogli warunek nałożony na poszukiwane rozwiązanie zapisać w postaci:

$$P_1 m_1 + P_2 m_2 + \ldots + P_n m_n \leqslant P.$$

Winniśmy tak dobrać liczby $m_1, m_2, \ldots, m_n$, by spełniony był powyższy warunek, a jednocześnie, aby całe urządzenie miało maksymalną niezawodność w pracy.

W naszym zadaniu warunek jest liniowy względem niewiadomych liczb $m_1, m_2, \ldots, m_n$, ale niezawodność, której maksimum szukamy, wyraża się przez nie nieliniowo. W ten sposób nasze zadanie, będące typowym zadaniem z zakresu optymalnego planowania, należy zaliczyć do zadań nieliniowego optymalnego planowania.

Rozpatrzymy obecnie kilka zadań z zakresu liniowego optymalnego planowania, dla rozwiązania których opracowano mniej lub bardziej dogodne ogólne metody. Zadania te, co zresztą wynika już z ich sformułowań, spotykamy dosłownie w każdym dziale praktycznej działalności. Postawmy sobie zadanie ustalenia składu porcji pokarmowej dla zwierząt, tak by przy kosztach ogólnych nie przekraczających danej wielkości

dostarczyć zwierzętom niezbędnej ilości białka, tłuszczów i węglowodanów. Przyjmijmy, że zwierzę potrzebuje co najmniej P_1 pewnych jednostek białka, P_2 — tłuszczów i P_3 — węglowodanów. Nie wolno zmniejszyć ilości któregokolwiek ze składników poniżej normy, ale można nieco ją przekroczyć. Rozporządzamy czterema rodzajami pasz A_1, A_2, A_3, A_4; cena jednego kilograma każdej z nich wynosi odpowiednio c_1, c_2, c_3, c_4. Wiadomo, że w kilogramie paszy A_i jest P_{1i}, P_{2i}, P_{3i} jednostek białka, tłuszczów i węglowodanów. Ile kilogramów x_1, x_2, x_3, x_4 paszy rodzaju A_1, A_2, A_3, A_4 należy zakupić, by koszty całkowite

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4$$

były minimalne, pod warunkiem, że zwierzę otrzyma białka

$$x_1P_{11}+x_2P_{12}+x_3P_{13}+x_4P_{14} \geqslant P_1,$$

tłuszczów

$$x_1P_{21}+x_2P_{22}+x_3P_{23}+x_4P_{24} \geqslant P_2$$

i węglowodanów

$$x_1P_{31}+x_2P_{32}+x_3P_{33}+x_4P_{34} \geqslant P_3.$$

Nie ma potrzeby podkreślania, że tak sformułowane zadanie jest ściśle związane z zagadnieniem racjonalnej gospodarki zasobami, innymi słowy, z osiąganiem celów optymalną drogą. Nie stawialiśmy sobie zadania szczegółowego rozpatrzenia zagadnienia obliczania porcji pokarmowej i dlatego nie uwzględniliśmy szeregu ważnych czynników. Jednak nasz schematyczny opis w pełni się nadaje do wyjaśnienia rodzaju powstających problemów.

Następujące zagadnienia różnią się od rozpatrywanego wyżej tylko tym, że dotyczą innych rzeczywistych sytuacji:

a) Znamy rozmieszczenie kilku obiektów wytwarzających pewien produkt (np. zagłębi węglowych) i dane są położenia odbiorców tego produktu. Znamy też koszty przewozu od dowolnego obiektu wytwarzającego do dowolnego odbiorcy. Należy ustalić plan przewozów realizujący minimum kosztów. Znane są obecnie rozwiązania dużej liczby konkretnych zadań transportowych, w których chodzi o ustalenie najtańszego planu przewozów. W szczególności opracowano plany najracjonalniejszego zaopatrzenia w węgiel głównych ośrodków przemysłowych kraju. Kilka lat temu ułożono optymalny plan zaopatrzenia 216 dużych placów budowy w Moskwie w piasek budowlany, dowożony z kilkudziesięciu kopalń piasku i nabrzeży. Związane z tym oszczędności transportowe wyrażały się liczbą ponad 2000 nowych rubli dziennie.

b) W każdym przedsiębiorstwie jest wiele różnorodnych urządzeń mogących wykonywać różnego rodzaju prace. Znamy wydajność urządzenia każdego typu przy wykonywaniu każdego rodzaju pracy oraz asortyment produkcji. Jak należy rozdzielić pracę między poszczególne urządzenia, aby zapewnić maksymalną wydajność przy wykonywaniu produkcji zgodnie z asortymentem? Nie ma potrzeby przypominać, że w wielu wypadkach nie oblicza się optymalnych planów użycia sprzętu. Aby wyjaśnić, jak ważne jest, by podobne obliczenia stały się regułą, a nie wyjątkiem, wystarczy powiedzieć, że każdy procent zwiększenia wydajności urządzeń w ZSRR oznacza wzrost produkcji wartości wielu setek milionów rubli bez włączania do produkcji dodatkowych urządzeń.

c) Przy produkcji masowej z materiałów określonych wymiarów i kształtu (np. blach, taśm) należy wytwarzać wyroby według określonego asortymentu. Chodzi o znalezienie takiego sposobu wycinania, by dla otrzymania jednego kompletu detali użyć minimalnej ilości materiału, czyli by minimalna jego ilość szła do odpadów. Rozwiązano obecnie dosyć dużo różnych konkretnych zadań tego typu i stwierdzono przy tym, że w stosunku do istniejących planów wykrawania da się uzyskać oszczędności rzędu 3-10%. Nie trzeba podkreślać znaczenia systematycznego rozwiązywania podobnych zadań dla gospodarki we wszystkich gałęziach produkcji. Dla wstępnego zapoznania się z rozwiązanymi dotąd zadaniami można polecić ciekawą książkę L. W. Kantorowicza i W. A. Załgallera [8].

Gdy trzeba rozwiązać zadanie z zakresu programowania liniowego o dużej liczbie niewiadomych, powstaje konieczność przeprowadzenia znacznych rachunków, do wykonania których należy użyć elektronowych maszyn liczących.

Zakładaliśmy dotychczas, że wszystkie parametry (ceny, waga, wymiary itp.) są wielkościami stałymi. Przy tym założeniu opracowano ogólne metody rozwiązywania zadań z optymalnego liniowego planowania (programowania liniowego) jak również z parabolicznego optymalnego planowania, w którym mogą występować nie tylko zależności liniowe. Sytuacja komplikuje się w przypadkach, gdy występujące parametry są wielkościami losowymi. Konieczność rozpatrywania takich właśnie trudniejszych problemów zachodzi przy pewnych zagadnieniach kierowania, w różnych sytuacjach gospodarczych i produkcyjnych, jak również przy badaniu zagadnień kierowania w żywych organizmach. Nie jest mi wiadome, czy uzyskano jakiekolwiek ogólniejsze wyniki w tym zakresie.

Zagadnienia matematycznej teorii gier. Często w procesach kierowania powstają sytuacje zbliżone do tych, z którymi mamy do czynienia w różnego rodzaju grach: występują dwie, albo kilka grup, z których każda stara się osiągnąć własne cele. Cele te mogą być sprzeczne. Aby

uzyskać pożądany rezultat, każda grupa usiłuje znaleźć najlepszą w danych warunkach linię postępowania, albo, jak mówimy, optymalną strategię. Jak dotychczas, szczególnie dobrze została opracowana matematyczna teoria takich gier, w których uczestniczą dwaj gracze. Nic w tym dziwnego, ponieważ już nawet w grze z trzema graczami sytuacja może się znacznie skomplikować: trzeci gracz może, celem zrealizowania własnych celów, zawierać sojusze na przemian z jednym lub drugim z pozostałych graczy. Historia dyplomacji zna wiele przykładów tego rodzaju, gdy w zależności od przebiegu gry dyplomatycznej jedno z państw zajmowało chwiejne stanowisko w stosunku do dwóch zasadniczych przeciwników. W pewnych przypadkach postępowanie tego rodzaju dawało znaczne korzyści właśnie takiej trzeciej sile. Gry koalicyjne wymagają z samej istoty rzeczy co najmniej trzech uczestników.

W rzeczywistości często mamy do czynienia z grami, w których biorą udział dwaj gracze (strony). Właśnie grami tego typu są szachy, piłka nożna, siatkówka i inne. Oczywiście w takiej grze jak piłka nożna graczem jest coś ogólniejszego — mianowicie cała drużyna. Z podobną sytuacją spotykamy się, gdy używamy wyrazu gra w szerszym znaczeniu, mając na myśli postępowanie w gospodarce, przemyśle lub w wojnie.

Przy tworzeniu teorii matematycznej dla zbadania pewnego zjawiska zwykle musimy abstrahować od wielu rzeczywistych okoliczności. Jesteśmy zmuszeni przybliżać rzeczywistość, budować pewien schemat przebiegu rzeczywistych zjawisk i badać przy pomocy matematycznej teorii nie samą rzeczywistość, a tylko ten schemat. Oczywiście, stworzenie schematu, do którego będziemy stosować matematyczne metody, stanowi zasadniczą część budowy dowolnej teorii. Im więcej szczegółów badanego zjawiska potrafimy uwzględnić, tym lepiej. Jednak branie pod uwagę zbyt wielkiej liczby szczegółów komplikuje nasz schemat i czyni go zbyt nieprzejrzystym. Dlatego właśnie dąży się zawsze przy tworzeniu teorii pewnego zjawiska do wyodrębnienia tylko rzeczy zasadniczych, mających wpływ na jego przebieg, i do odrzucenia jako nieistotnych wielu innych jego cech.

Zakłada się przede wszystkim, że każda gra podlega zespołowi ściśle sformułowanych prawideł. Ponadto przyjmuje się, że gracze wykonują ruchy w określonym porządku. Każdemu ruchowi odpowiada pewna liczba — wygrana jednego z graczy; liczba ta przyjmuje różne wartości w zależności od ruchu, który gracz wykonał. Grę nazywamy skończoną, gdy w każdym momencie gracz ma tylko skończoną ilość możliwych ruchów. Gdy przy końcu gry suma wygranych wszystkich graczy równa jest zeru, mówimy, że jest to gra z sumą zerową. Gdy gracz A może za każdym razem wybierać jedną z m możliwości i, w zależności od tego, jaki ruch wykona gracz B, otrzymać określoną wygraną, zaś gracz B może w każdym ruchu wybrać jedną z n możliwości — grę nazywamy

grą prostokątną lub macierzową. Taka gra jest określona przez podanie prostokątnej tablicy liczb — macierzy:

$$p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1m}$$
$$p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2m}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nm}$$

Liczba p_{ij}, stojąca na przecięciu i-go wiersza i j-tej kolumny, wskazuje wielkość wygranej gracza A, jeśli wybrał on w kolejnym ruchu j-tą możliwość, zaś gracz B — i-tą. Strategię nazywamy strategią mieszaną, gdy gracz A wybiera j-tą możliwość z pewnym prawdopodobieństwem x_j, zaś gracz B — i-tą możliwość z prawdopodobieństwem y_i $\left(\sum_{j=1}^{m} x_j = \sum_{i=1}^{n} y_i = 1\right)$. Zadanie gracza A polega na tym, by tak obrać strategię $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, aby zapewnić sobie maksymalną wygraną nawet przy najniekorzystniejszym dla niego postępowaniu przeciwnika. Podstawowy fakt teorii gier macierzowych polega na tym, że gra macierzowa posiada zawsze rozwiązanie, tzn. zawsze istnieje para optymalnych strategii mieszanych dla obu graczy.

Mimo, że w teorii gier nakłada się niezwykle silne warunki na sposób przebiegu gry, pozwoliła ona uzyskać wiele wniosków o dużym znaczeniu dla praktyki i różnych gałęzi wiedzy. W szczególności w statystyce matematycznej szereg ciekawych i ważnych opracowań ma swoje źródła w teorii gier. Należy do nich na przykład teoria statystycznych funkcji decyzji, która znalazła poważne zastosowania między innymi w statystycznej kontroli jakości produkcji.

Z teorią gier można się obecnie zapoznać w wielu książkach i artykułach. Wskażemy tylko na pewne z nich: [9], [10], [11].

Zakończenie. W niniejszym artykule nie wspomnieliśmy wcale o szeregu bardzo ważnych działów matematyki, które odgrywają znaczną rolę w cybernetyce. Na przykład, prawie całkowicie pozostawiliśmy na uboczu logikę matematyczną wraz z tak ważnymi jej działami, jak teoria algorytmów, teoria automatów, teoria grafów i sieci. Nie tknęliśmy wcale problemów z teorii programowania maszyn liczących, a między nimi ciekawego problemu automatyzacji programowania. Pozostawiliśmy na uboczu zadania, jakie stawiają zagadnienia cybernetyki przed teorią prawdopodobieństwa i statystyką matematyczną. O ile zagadnienia logiki matematycznej i rozwiązywania zadań przy pomocy maszyn u nas w literaturze [12] były już w pewnej mierze poruszane, o tyle dotychczas nie mamy prac, w których można by się zapoznać z problemami współczesnej

statystyki lub teorii procesów stochastycznych. Istniejące obszerne podręczniki i specjalne monografie do tego celu się nie nadają(1).

W wielu urządzeniach służących do automatycznego kierowania duży wpływ na przesyłany sygnał mają przypadkowe bodźce. Na przykład, na działalność autopilota mają wpływ zjawiska zaburzeń atmosferycznych. Należy zatem osiągnąć automatyczną likwidację wpływów tego typu, aby autopilot mógł wykonywać powierzoną mu pracę. Podobnie, przy przekazywaniu sygnału za pomocą fal radiowych, nakładają się nań liczne przypadkowe zaburzenia. Na przykład, przy przekazywaniu zdjęć drugiej strony Księżyca przez radziecką rakietę kosmiczną, sygnał właściwy stanowił drobną część towarzyszących mu przypadkowych zaburzeń. Aby wykorzystywać sygnały zgodnie z przeznaczeniem, należy nauczyć się oddzielać je od szkodliwych wpływów. Jeśli ściśle zbadać wszystkie procesy kierowania, można stwierdzić, że podczas przekazywania sygnału ośrodka kierującego lub informacji o stanie systemu, którym się kieruje, są one zniekształcone przez przypadkowe przeszkody. Aby opracować ogólne zasady uwzględniania wpływu zaburzeń i walki z nimi, należy przeprowadzić systematyczną analizę teoretyczną tych procesów przypadkowych. Tylko dokładna znajomość rzeczy daje podstawy i pewność poprawnego opracowania efektownych metod zmiany przyrody.

Staranne zbadanie rzeczywistych procesów zachodzących w licznych zjawiskach fizycznych, chemicznych, geofizycznych, biologicznych i technicznych dowiodło, że z dostatecznie dużą dokładnością można je schematycznie opisać przy pomocy jednego z dwóch sposobów. Pierwszy typ procesów nazwano procesami Markowa, drugi — procesami stacjonarnymi. Procesy Markowa cechuje nie tylko to, że bardzo wiele zadań teoretycznych i praktycznych do nich się sprowadza, ale i to, że w pewnym sensie każdy proces może być sprowadzony do procesu Markowa. Ponadto został dokładnie opracowany aparat matematyczny teorii procesów Markowa; jego część analityczna opiera się na teorii równań różniczkowych i różniczkowo-całkowych, tzn. na zwykłym aparacie matematycznym fizyki, techniki i chemii.

Zanim podamy definicję procesów Markowa i procesów stacjonarnych będziemy musieli wprowadzić pewne pojęcia. Rozpatrzmy pewien układ S, którego treść realna chwilowo nas nie interesuje. Może nim być linia automatyczna, automat telefoniczny, układ kierujący walcownią lub autopilot. Istotne jest dla nas to, że w każdej chwili nasz układ znajduje się w pewnym stanie, który oznaczymy przez x. Przez x możemy rozumieć nie tylko wartość jakiegoś jednego parametru charakteryzującego stan układu, ale również wartość wielu parametrów. Na przykład, gdy układ

(1) Uwagi autora dotyczące braków literatury matematycznej w języku rosyjskim są aktualne i u nas (*Redakcja*).

składa się z jednej cząstki znajdującej się pod wpływem innych cząstek, to jej stan będziemy mogli opisać przy pomocy sześciu liczb — jej współrzędnych oraz trzech składowych jej prędkości w kierunku każdej osi. Oznaczmy przez X zbiór wszystkich możliwych stanów, w których może się znaleźć nasz układ. Gdy w chwili t układ S może się znaleźć w każdym stanie tylko z pewnym prawdopodobieństwem, mówimy, że zmiana stanu układu jest procesem stochastycznym $x(t)$.

Procesy Markowa charakteryzują się tym, że gdy znamy stan układu w chwili t_0, to prawdopodobieństwo, że w chwili $t > t_0$ układ znajdzie się w stanie x, zależy od $x_0 = x(t_0)$ i nie zmieni się ono, gdy będziemy znali stany układu w czasie poprzedzającym t_0. Zauważmy, że do procesów typu Markowa sprowadzono wiele zagadnień z teorii obsługi masowej, niezawodności, teorii dyfuzji, automatycznego kierowania, rozmnażania się i śmiertelności i in.

Własnością charakterystyczną procesów stacjonarnych jest niezmienność ich rozkładu przy zmianie chwili początkowej. Wyjaśnimy to: niech $x(t)$ będzie procesem stochastycznym. Rozpatrzymy nowy proces stochastyczny $y(t) = X(t-\tau)$. Gdy dla dowolnych n i $t_1, t_2, \ldots, t_n$ rozkłady układów zmiennych losowych $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)$ i $y(t_1), y(t_2), \ldots$ $\ldots, y(t_n)$ są jednakowe i nie zależą od τ, to proces nazywamy stacjonarnym. Teoria stacjonarnych procesów stochastycznych osiągnęła duże znaczenie we współczesnej radiotechnice, fizyce statystycznej, meteorologii. Jest to zrozumiałe, gdyż przy ustalonych warunkach pracy pewnego układu jego parametry zachowują w każdej chwili nie tylko rozkłady prawdopodobieństwa, ale i związki między stanami w jednakowych odstępach czasu.

Nie musimy podkreślać, że mimo szerokich możliwości rozpatrywania omówionych dwóch typów procesów, nie można przy ich pomocy ogarnąć różnorodności wszystkich rzeczywistych sytuacji. Dlatego właśnie w ostatnich latach powstała potrzeba rozpatrywania procesów nowych typów, które mogą lepiej opisywać rzeczywiste sytuacje. Zaliczamy do nich procesy o przyrostach stacjonarnych, procesy liniowe, złożone łańcuchy Markowa i in. Istnieje obecnie dosyć obszerna literatura na temat zastosowania teorii procesów stochastycznych do zagadnień praktycznych [13]-[17]. Trzeba jednak stwierdzić, że wymaga ona od czytelnika dosyć dużego przygotowania matematycznego.

Mówiliśmy już poprzednio, że we wszystkich procesach kierowania szczególnie wielką rolę gra ustalenie zakresu informacji, która byłaby zarazem wyczerpująca i minimalna. By rozwiązać to zagadnienie, należy opracować odpowiednie ogólne metody. Takie metody dotyczące informacji o zdarzeniach przypadkowych, wielkościach przypadkowych i procesach przypadkowych są opracowywane przez statystykę matematyczną. Jak należy organizować obserwacje i ile ich przeprowadzić, by uzyskać

wartość mierzonej wielkości z zadaną dokładnością? Jak należy postępować, by sprawdzić prawidłowość przypuszczenia co do typu badanego procesu: czy jest to proces Markowa, stacjonarny, czy też inny? Czy można uważać, że dwie serie obserwacji pewnych wielkości przypadkowych dają podstawy do stwierdzenia niezmienności rozkładu tych wielkości? Z tym ostatnim pytaniem stykamy się w wielu ważnych zagadnieniach praktycznych, na przykład przy organizacji bieżącej kontroli statystycznej.

Niech rozpatrywana wielkość losowa ξ ma rozkład normalny. Inaczej mówiąc, niech jej dystrybuanta wyraża się wzorem:

$$P(\xi < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz,$$

gdzie wielkości a i σ są stałe. Jak można w sposób najdogodniejszy oszacować te parametry, gdy znamy wyniki obserwacji wielkości ξ: $x_1, x_2, \ldots, x_n$? Otóż okazuje się, że wszystkie informacje zawarte w tych danych z obserwacji są równoważne znajomości tylko dwóch wielkości:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{i} \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

przy czym $\bar{x}$ (średnia arytmetyczna) daje oszacowanie dla a, zaś S (średnie odchylenie kwadratowe) — dla σ. Przykład powyższy przekonuje nas o tym, jak duże oszczędności czasu i wysiłku osiągamy korzystając ze znanych ogólnych faktów statystyki matematycznej. Gdy więc chcemy znaleźć ciężar pewnych wyrobów wiedząc, że mają one rozkład normalny, to nie mamy potrzeby ważenia każdego wyrobu z osobna. Wystarczy znaleźć ciężar wszystkich wyrobów i podzielić przez ich liczbę. Wykonanie poszczególnych ważeń niczego już nie doda do informacji uzyskanej w prostszy sposób.

Prace cytowane

[1] *Объективные основания диагноза*, Кибернетический сборник 2, Изд. иностранной литературы, 1961.

[2] *The use of electronic computers to aid in medical diagnosis*, Proceedings of the IRE, Biometrical Electronics Issue, 1959, v. 47a. Nr 11, 1960.

[3] Б. В. Гнеденко и Б. С. Мешель, *Об оценке эффективности уточнения расчетов электрических нагрузок промышленных сетей*, Электричество, 1959, 11, 70.

[4] Б. В. Гнеденко, *Теоретико-вероятностные основы статистического метода расчета электрических нагрузок промышленных предприятий*, Известия вузов, серия Электромеханика 1961, 1, 90.

[5] Н. П. Бусленко и Ю. А. Шрейдер, *Метод статистических испытаний*, Москва 1961.

[6] Дж. Нейман, *Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент*, в сб. Автоматы, перевод с англ. Изд. иностранной литературы, Москва 1956.

[7] Э. Ф. Мур и К. Э. Шеннон, *Надежные схемы из ненадежных реле*, Кибернетический сборник 1, Изд. иностранной литературы, Москва 1960.

[8] Л. В. Канторович и В. А. Залгаллер, *Расчет рационального раскроя промышленных материалов*, Москва 1951.

[9] J. S. Wencel, *Elementy teorii gier*, Warszawa 1961.

[10] Дж. Мак-Кинси, *Введение в теорию игр*, Физматгиз, Москва 1960.

[11] Р. Д. Льюис и Х. Райфа, *Игри и решения*, перевод с англ., Изд. иностранной литературы, Москва 1961.

[12] B. A. Trachtenbrot, *Algorytmy i automatyczne rozwiązywanie zadań*, Warszawa 1961.

[13] В. И. Бунимович, *Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах*, Изд. „Сов. радио", 1960.

[14] Б. Р. Левин, *Теория случайных процессов и её применение в радиотехнике*, Изд. „Сов. радио", 1960.

[15] Ленинг и Беттин, *Случайные процессы в задачах автоматического управления*, перевод с англ., Изд. иностранной литературы, Москва 1958.

[16] В. С. Пугачев, *Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления*, Физматгиз, Москва 1960.

[17] А. А. Свешников, *Прикладные методы теории случайных функций*, Судпромгиз, Москва 1961.