ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1963)

wmptm 1897

G. CHOQUET (Paryż)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Analiza i Bourbaki*

Tytuł tego artykułu budzi zapewne nadzieję, a zarazem i obawę, że pokuszę się w nim o zanalizowanie myśli wielomózgowego tworu znanego pod nazwiskiem Bourbaki.

W istocie rzeczy chcę tu raczej mówić o całokształcie współczesnej analizy. Bourbaki jednak odgrywa w rozwoju matematyki tak wielką rolę, a koncepcje jego osiągnęły tak znaczny stopień krystalizacji, że można, jak się wydaje, zastanowiwszy się głębiej nad jego dziełami, zarówno matematycznymi, jak i filozoficznymi, uchwycić podstawowe tendencje rozwojowe współczesnej analizy matematycznej.

Analiza Bourbakiego, którą chcemy tu przeprowadzić, pozwoli nam wyciągnąć w końcu tego artykułu pewne wnioski dotyczące nauczania analizy odpowiadającego potrzebom chwili.

Metoda aksjomatyczna

Historia matematyki wykazuje dobitnie, że po okresie intensywnych badań, rozszerzających istotnie zakres wiedzy matematycznej, następuje zawsze okres syntezy, przynoszący nowe metody ogólne i utwierdzający w posadach gmach matematyki. Na przykład dokonana przez Kartezjusza synteza uwieńczyła długi okres poszukiwań, prowadzonych, wydawałoby się, w rozmaitych kierunkach, i usunęła do muzeum osobliwości cały szereg starannie wypracowanych metod badania poszczególnych funkcji i krzywych.

W chwili obecnej liczba matematyków jest tak wielka, że obie te tendencje mogą współistnieć jednocześnie. Dzieło jednak syntezy przeprowadzone w ciągu ostatnich pięćdziesięciu lat, możliwe głównie dzięki stworzeniu teorii mnogości i języka teoriomnogościowego, szczególnie zasługuje na uwagę. Specjalnie konkretny wyraz znalazła owa synteza w twórczości Bourbakiego i na tym przykładzie chcę tutaj przeprowadzić jej badanie.

---

* Odczyt wygłoszony 26 czerwca 1961 roku na Seminarium Międzynarodowej Komisji Nauczania Matematyki (C. I. E. M.) w Lozannie. Ogłoszony w języku francuskim w L'Enseignement Mathematique, t. VIII, fasc. 1-2, str. 109-135.

Dla Bourbakiego istnieje obecnie tylko *jedna matematyka*. Ewolucja matematyki prowadząca do owej unifikacji odbywa się przede wszystkim dzięki zastosowaniu *metody aksjomatycznej*.

Używając owej metody przy badaniu pewnej teorii, matematyk „*rozdziela* główne sprężyny rozumowań w tej teorii spotykanych, a następnie, rozważając każdą z nich z osobna, podnosi ją do rangi przyczyny absolutnej i wyprowadza z niej wszystkie możliwe wnioski. Później, wracając do badanej teorii *kombinuje* ze sobą owe wydzielone wcześniej części składowe i bada ich wzajemne oddziaływanie na siebie" (Bourbaki).

W cytowanych wyżej słowach odnajdujemy, w postaci znacznie konkretniejszej, jedną z podstawowych zasad Kartezjusza: dzielenie każdej trudności na wiele prostych części składowych.

Główne sprężyny rozumowań prowadzą do wyodrębnienia *struktur*.

W zbiorze liczb rzeczywistych R są określone na przykład rozmaite struktury: struktura grupy, struktura ciała, przestrzeni wektorowej, porządku, struktura przestrzeni topologicznej itd.

Na odwrót, ta sama struktura może być jedną z głównych sprężyn wielu teorii. Strukturę grupy odnajdziemy na przykład badając liczby rzeczywiste, liczby całkowite modulo p, przesunięcia przestrzeni itp.

Aby z wniosków otrzymanych przy badaniu jakiejś konkretnej struktury można było korzystać w rozmaitych teoriach matematycznych, klasa zbiorów, w których rozpatrujemy ową strukturę, musi być dostatecznie szeroka. W szczególności, charakter elementów zbioru, w którym rozważamy strukturę, nie może odgrywać żadnej roli; liczyć się mogą jedynie związki między tymi elementami. Natura tych związków znajduje precyzyjny wyraz w *aksjomatach* określających rozważaną strukturę.

Na przykład struktura porządku w dowolnym zbiorze E jest dwuczłonową relacją między elementami E, oznaczaną symbolem $\prec$ i spełniającą następujące aksjomaty:

Dla wszelkich x, y, z należących do E mamy:

$$(1) \qquad x \prec x;$$

$$(2) \qquad (x \prec y \text{ i } y \prec x) \Rightarrow (x = y);$$

$$(3) \qquad (x \prec y \text{ i } y \prec z) \Rightarrow (x \prec z).$$

Znaczenie niektórych struktur jest szczególnie wielkie dzięki temu, że odnajduje się je we wszystkich prawie teoriach matematycznych. Są to *struktury-matki*: struktura relacji równoważności, struktura porządku, struktury algebraiczne, struktury topologiczne itd.

Struktury-matki różnią się między sobą bogactwem: np. struktura skończonej grupy abelowej lub struktura ciała są bogatsze od struktury grupy dowolnej.

W budowie innych struktur, już bardziej skomplikowanych, interweniuje kilka struktur-matek związanych warunkami zgodności —

są to *struktury złożone*. Przykładem takiej struktury jest struktura grupy topologicznej: grupą topologiczną nazywamy bowiem zbiór, w którym określona jest struktura grupy i struktura przestrzeni topologicznej, spełniające warunek zgodności polegający na tym, że operacje $(x, y) \to x \cdot y$ i $x \to x^{-1}$ są ciągłe.

Algebra topologiczna i topologia algebraiczna badają struktury złożone. Struktury stanowiące przedmiot badań geometrii różniczkowej i algebry różniczkowej są jeszcze bogatsze.

Na samym szczycie matematyki pojawiają się wreszcie *struktury rozgałęzione*, złożone z bardzo wielkiej liczby struktur. Świetnym przykładem takiej struktury jest teoria potencjału. Mnogość struktur-matek składających się na teorie tego rodzaju jest przyczyną zainteresowania, jakim darzą je matematycy pracujący w najrozmaitszych dziedzinach. Wszelki postęp dokonany w badaniu struktur składowych odbija się na rozwoju takich teorii. Na przykład postępy w rozwoju teorii potencjału odpowiadają nowym wynikom otrzymanym w takich teoriach, jak teoria całki Lebesgue'a, przestrzeni topologicznych, przestrzeni wektorowo-topologicznych, teoria miar Radona, lokalnie zwartych grup abelowych, teoria dystrybucji itd.

Takie właśnie struktury są przedmiotem badań analizy. *Analizę* możemy więc określić jako zbiór wszystkich struktur rozgałęzionych. Ponieważ pojęcie struktury rozgałęzionej nie jest dokładnie określone, więc liczba teorii graniczących z analizą jest bardzo wielka. Definicja nasza ustala jedynie hierarchię: teoria A należy do analizy w stopniu większym niż teoria B, jeśli struktury interweniujące w A są bogatsze od struktur interweniujących w B.

Analiza stanowi przeto świat, którego złożoność i bogactwo przypomina bogactwo i złożoność życia. Algebra natomiast jest światem mineralnym, którego urodę stanowią czyste, krystaliczne formy. Analiza zaludniona jest tworami o płynnych konturach, podobnymi do morskich alg, gąbek i hydr — to bujna dżungla, którą badać można idąc rozmaitymi drogami i gdzie każdy nadaje połaci, którą karczuje, piętno swojej osobowości.

Charakterystyczne własności metody aksjomatycznej.

1. Ostatnie dziesięciolecia rozwoju matematyki i rozwoju przemysłu wykazują ciekawe analogie:

Stosowanie metody aksjomatycznej przypomina wprowadzenie w życie systemu organizacji pracy opracowanego przez Taylora; struktury-matki odgrywają rolę obrabiarek.

Metoda aksjomatyczna przynosi znaczną *oszczędność myśli i oznaczeń*. Ważne fakty, z których — w różnej postaci — korzysta się w wielu rozmaitych dziedzinach, są udowodnione raz na zawsze w teorii aksjo-

matycznej dostatecznie ogólnej, aby objąć nią wszystkie szczególne przypadki. Dowodząc ich wybiera się terminologię i oznaczenia w ten sposób, aby można było je zużytkować we wszystkich przypadkach szczególnych. Pierwszeństwo mają terminy sugestywne, wywołujące liczne rezonanse, budzące intuicję.

Dbałość o wybór terminów kojarzy się z troską o przejrzystość redakcji. Matematycy współcześni piszą stylem precyzyjnym i pozbawionym zbędnych ozdób. Lubią oni obnażać szkielet swych rozumowań, dzieląc je na definicje, lematy, twierdzenia, wnioski, uwagi i zaopatrując miejsca trudniejsze w znaki ostrzegawcze (*Z*!).

2. Pierwsze systemy aksjomatyczne były systemami *jednoznacznymi* (aksjomatyka Euklidesa i Hilberta geometrii elementarnej, aksjomatyka Peano liczb naturalnych). Aksjomatyka struktur podstawowych jest natomiast *wieloznaczna*, aksjomaty tych struktur mogą być spełnione w wielu, nie koniecznie izomorficznych między sobą, zbiorach.

Ta wieloznaczność pozwala stosować owe struktury w rozmaitych sytuacjach. Trudno jest nawet czasem zdecydować, czy pewne twierdzenie należy do algebry, geometrii czy analizy.

Przestrzenna geometria analityczna jest po prostu algebrą liniową w przestrzeni wektorowej trójwymiarowej, zaopatrzonej w iloczyn skalarny. Badanie form kwadratowych w tej przestrzeni jest natomiast badaniem kwadryk.

Podobnie, badać przestrzeń Hilberta — znaczy bez wątpienia uprawiać geometrię (sfery, kąty prostopadłe), znaczy to jednak również uprawiać analizę i algebrę. Dla H. Cartana, na przykład, wymiatanie w teorii potencjału jest po prostu rzutowaniem ortogonalnym na pewien wypukły stożek w przestrzeni Hilberta. Ogólniej, teoria zbiorów wypukłych należy do geometrii, ale przy badaniu przestrzeni wektorowo-topologicznych staje się ona podstawowym narzędziem analityka.

Wieloznaczność podstawowych struktur jest więc czynnikiem jednoczącym, pozwalającym rozmaitym dziedzinom matematyki na wzajemne przenikanie i wzbogacanie się. Zjawisko to nie jest wcale nowe. Wystarczy przypomnieć reprezentację geometryczną liczb zespolonych, syntezę między geometrią i algebrą, przeprowadzoną przez Kartezjusza, czy znaczenie geometrii w badaniach analitycznych Monge'a. Dzięki jednak algebrze zbiorów i jej uniwersalnemu językowi zjawisko to stało się znacznie bardziej powszechne. Zacytujmy kilka charakterystycznych przykładów: topologia Zariskiego w geometrii algebraicznej, interpretacja i dowody topologiczne licznych twierdzeń logiki, teoria snopów, stworzona dla potrzeb topologii algebraicznej (J. Leray) i odgrywająca coraz większą rolę w algebrze i analizie.

3. Z owej wieloznaczności wynika wreszcie, że nie bada się już poszczególnych tworów, ale rodziny tworów pozostających w pewnym

związku. Tak więc nie tylko twierdzenia stają się znacznie bardziej ogólne, ale i poszczególne twory są coraz lepiej znane, ich bowiem związki z innymi tworami pozwalają dostrzec ich różne aspekty.

Nowość nie polega zresztą tutaj na użyciu „kontekstu" — polega ona na zdaniu sobie sprawy z tego zjawiska i z jego powszechności. Od dawna przecież styczną do krzywej definiuje się za pomocą rodziny siecznych, wyjaśnia własności funkcji analitycznych w dziedzinie rzeczywistej za pomocą ich własności w dziedzinie zespolonej i od dawna korzysta się z własności „rodzin normalnych" funkcji analitycznych.

Matematyka współczesna jest zatem „relacyjna"; stąd właśnie wynika jej wewnętrzny *dynamizm*, wyrażający się nawet w słownictwie (przekształcenia, injekcje, źródła) i znakowaniu (strzałki i diagramy).

Dla oznaczenia przekształceń, relacji i działań znaleziono wygodną symbolikę, jak np.

$$x \to f(x); \quad A \to \bar{A}; \quad x \sim y; \quad x \prec y; \quad A \times B; \quad \bigcap A_i; \quad E/R.$$

W rękach matematyka badane twory ulegają ciągłym przekształceniom — jak surowy diament w rękach szlifierza, a każde z tych przekształceń pokazuje — niby nową powierzchnię szlifowanego brylantu — nieoczekiwany aspekt badanego tworu.

Ten „relacyjny" charakter matematyki jest zgodny ze znaną zasadą głoszącą, że dla dokładnego poznania jakiegoś pojęcia należy poznać jego związki z pojęciami bliskimi oraz pojęcia przeciwne. Jest on również zgodny z zasadą, która zdaje się patronować wszelkim współczesnym badaniom naukowym, mianowicie z zasadą głoszącą, że nie docieramy nigdy do „esencji" rzeczy, możemy mieć jedynie nadzieję na poznanie związków między nimi. Doświadczenie fizyczne wyjawia jedynie naturę związku między wszechświatem i przyrządem pomiarowym. Istota instalacji telefonicznej nie leży w naturze ani kształcie przewodników, ale w schemacie tej instalacji — podobnie dla matematyka dwa zbiory z pewną strukturą są identyczne, jeśli są ze względu na tę strukturę izomorficzne.

4. Wieloznaczność teorii zwiększa możliwość stosowania matematyki w fizyce. Przestrzeń Hilberta służy do interpretowania kwantowej teorii pola, geometria riemannowska i teoria zewnętrznych form różniczkowych jest właściwym językiem ogólnej teorii względności. Zresztą współczesna fizyka teoretyczna sama rozbudowuje się używając metody aksjomatycznej. Operując tą metodą przyjmuje się za podstawę systemu aksjomatycznego pewne znane fakty, świetnie sobie zresztą zdając sprawę, że wybrane aksjomaty odbijają jedynie niektóre aspekty świata fizycznego. Dla uzyskanych w ramach tego systemu twierdzeń szuka się potwierdzenia na drodze eksperymentu.

5. Dobra aksjomatyka jest często jedynym sposobem wybrnięcia

z kłopotów metafizycznych. Liczby zespolone na przykład straciły całą swą tajemnicę i swój „urojony" charakter w dniu, w którym okazało się, że są one po prostu zbiorem $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$ z dwiema jasno określonymi operacjami. Przykład jeszcze bliższy: podstawy rachunku prawdopodobieństwa długo osnute były mgłą, a sama teoria miała wówczas jeszcze trzy ośrodki: teorię gier, teorię błędów i teorię stochastyczną. Rachunek prawdopodobieństwa zyskał mocne podstawy i jednolitość dzięki aksjomatyce Kołmogorowa. Okazało się wówczas, że jest on gałęzią teorii miary, gałęzią szczególnie zresztą żywotną, posiadającą własny język i swoiste metody. Metody i wyniki teorii miary przyczyniły się do jego szybkiego rozwoju i z kolei on sam mógł przyczynić się do rozwoju analizy klasycznej. Świadectwem niech będą odkryte w ciągu ostatnich lat ścisłe związki między teorią potencjału i teorią procesów Markowa.

Niebezpieczeństwa metody aksjomatycznej. Skoro systemy aksjomatyczne są obrabiarkami matematyki, to są one interesujące jedynie wtedy, gdy ich wydajność jest odpowiednio duża. Systemy aksjomatyczne można określać stosunkowo łatwo, na przykład modyfikując jakiś znany system. Liczba większych i mniejszych prac otrzymanych tą metodą jest niestety bardzo wielka. Stworzenie opisanych w nich teorii dostarcza zwykle ich autorom wiele przyjemności, co skłania ich do przypisywania swym systemom dużego znaczenia. Teorie te mają jednak na ogół bardzo niewiele zastosowań, a zdarzają się i takie, które nie mają żadnych.

Narzuca się więc istotne pytanie: jakie systemy aksjomatyczne są użyteczne? Zapewne nie istnieje żadne absolutne kryterium pozwalające rozstrzygać o użyteczności teorii, można jednakże zgodzić się z tym, że do zabicia muchy nie trzeba koniecznie używać kamienia brukowego. Ogólna teoria znajdzie dla siebie uzasadnienie, jeśli odkryje ona nieoczekiwane i otwierające nowe możliwości związki między teoriami uważanymi dotychczas za dalekie lub jeśli przyniesie rozwiązanie jakiegoś ciekawego zagadnienia. Nawet jeśli teoria ogólna ma bardzo wiele modeli, nie pociąga to za sobą jej użyteczności; może ona bowiem rzucać na te modele światło zbyt słabe.

Trudne zagadnienia. Czytelnik zobaczy dalej jak skrupulatnie wysortował Bourbaki teorie, którym przyznał prawo obywatelstwa w swoim traktacie dydaktycznym. Warto jednak już teraz pokazać, co chroni Bourbakiego od mechanicznego rozwijania systemów aksjomatycznych.

André Weil mówi, że „logika jest higieną matematyka, ale jego chlebem powszednim, środkiem umożliwiającym mu życie, są trudne zagadnienia".

Powtarza to w zasadzie za Hilbertem, który twierdził, że „gałąź wiedzy jest żywa tylko dopóty, dopóki jest źródłem wielkiej ilości zagadnień; brak tych zagadnień jest znakiem bliskiej śmierci".

Hilbert jest dla Bourbakiego modelem, więcej — prawie ojcem, warto więc może posłuchać, co syn mówi o ojcu. Bourbakiści podziwiają elegancję, prostotę prac Hilberta, którą zawdzięcza on swej umiejętności „wydobycia ze skorupy dla nikogo niedostrzegalnych, fundamentalnych faktów, które pozwalają wytyczyć, na próżno dotychczas poszukiwaną, drogę królewską prowadzącą do rozwiązania". Hilbert jest mistrzem aksjomatyki — zarówno jednoznacznej (geometria elementarna), jak i wieloznacznej — to on nauczył matematyków myśleć aksjomatycznie. „Nigdy nie zdarzyło mu się popaść w błąd, którego nie uniknęli niektórzy z jego uczniów: nie stworzył nigdy ogromnej teorii aksjomatycznej mającej niewielkie zastosowania, nie uogólniał dla samej przyjemności uogólnienia" (Dieudonné). Pasjonował go zawsze problem specjalny i konkretny. W celu rozwiązania takich właśnie problemów, stworzył narzędzia, których znaczenie wciąż rośnie: opartą na półciągłości metodę bezpośrednią rachunku wariacyjnego (dla rozwiązania zagadnienia Dirichleta), definicję „przestrzeni Hilberta" (dla rozwiązywania równań całkowych) itd.

Problemy, które przedłożył uwadze matematyków na Kongresie w 1900 roku, ciągle jeszcze stanowią przedmiot owocnych badań. Mnożą się w szczególności próby zaatakowania zagadnienia Riemanna, dotyczącego zer funkcji $\zeta(s)$, choć prawdziwa istota tego zagadnienia wydaje się jeszcze nieznana.

Kilka przydatnych narzędzi

Matematyk współczesny badając pewną strukturę często musi posługiwać się strukturami pomocniczymi; dla określenia ich potrzebuje przewodnika, który może mu zapewnić wybór właściwych definicji. Rozpatrzymy tutaj kilka wypróbowanych chwytów, które mogą spełnić rolę owego przewodnika.

Morfizmy; struktury początkowe i końcowe. Strukturę w zbiorze E określamy na ogół kilkoma aksjomatami, które mówią coś o własnościach elementów E (odwołując się ewentualnie do pewnych zbiorów pomocniczych). Postać owych aksjomatów charakteryzuje tak zwany gatunek struktury. Ograniczymy się do podania kilku przykładów.

Aksjomaty grupy charakteryzują *gatunek struktury*, grupy abelowe stanowią podgatunek. Przykłady innych gatunków: przestrzenie wektorowe rzeczywiste, przestrzenie topologiczne zwarte, rozmaitości różniczkowalne.

Jeśli w zbiorach A i B wprowadzone są struktury tego samego gatunku, to bijekcja (tj. przekształcenie wzajemnie jednoznaczne) f zbioru A na zbiór B nazywa się *izomorfizmem*, jeśli, co daje się bez trudności sprecyzować w każdym konkretnym przypadku, zamienia ona strukturę określoną w A na strukturę określoną w B.

Ogólniej, *morfizmem* zbioru A w zbiór B nazywamy przekształcenie A w B, posiadające pewne własności związane z rozważanymi strukturami. Definicję morfizmu wybiera się zazwyczaj tak, aby superpozycja dwu morfizmów była morfizmem i aby bijekcja f zbioru A w B — w przypadku gdy f i f^{-1} są morfizmami — była izomorfizmem. Jeśli rozważanym gatunkiem struktur są przestrzenie topologiczne, to pewną klasę morfizmów stanowią przekształcenia ciągłe. Inną klasę, mniej zresztą przydatną, stanowią przekształcenia otwarte, tj. takie, przy których obrazami zbiorów otwartych są zbiory otwarte.

Rozważmy teraz pewien zbiór A, rodzinę (B_i) zbiorów zaopatrzonych strukturami ustalonego gatunku oraz rodzinę przekształceń (f_i), gdzie f_i jest przekształceniem zbioru A w B_i. Nasuwa się pytanie, czy można w zbiorze A określić tak strukturę rozważanego gatunku, aby wszystkie f_i stały się morfizmami. Przy pewnych, dających się dokładniej sprecyzować założeniach strukturę taką można określić; co więcej, wśród wszystkich struktur w A posiadających żądaną własność istnieje jedna, wyróżniona, którą nazywamy *strukturą początkową* wyznaczoną przez (B_i, f_i). W ten właśnie sposób, gdy rozważanym gatunkiem struktur są przestrzenie topologiczne, określa się przeciwobraz topologii, topologię podprzestrzeni oraz iloczyn kartezjański przestrzeni topologicznych.

Jeśli rozważane f_i są przekształceniami zbiorów B_i w A, to wyróżniona struktura w A — o ile istnieje — nosi nazwę *struktury końcowej*. W ten sposób definiuje się na przykład topologię w zbiorze A klas abstrakcji relacji równoważności R określonej w przestrzeni topologicznej B.

Zbiory i przekształcenia uniwersalne. Oto opis sytuacji o jaką chodzi. Rozważmy dwa gatunki struktur, powiedzmy S i T i zbiór A zaopatrzony w strukturę gatunku S. Niech dane będą dwie rodziny przekształceń, rodzina przekształceń zbioru A w zbiory gatunku T (przekształcenia te będziemy nazywać $(S-T)$-przekształceniami) oraz rodzina przekształceń zbiorów gatunku T w zbiory gatunku T, które będziemy nazywać T-przekształceniami. Zakładamy, że rozważane rodziny są przechodnie, to jest, że superpozycja $(S-T)$-przekształcenia i T-przekształcenia jest $(S-T)$-przekształceniem, a superpozycja dwu T-przekształceń — T-przekształceniem.

W sytuacji opisanej powyżej można pytać, czy istnieje zbiór $\mathscr{B}$ gatunku T i $(S-T)$-przekształcenie Φ zbioru A w $\mathscr{B}$, takie że każde $(S-T)$-przekształcenie φ zbioru A w pewien zbiór B daje się zapisać w postaci $\varphi = f \circ \Phi$, gdzie f jest T-przekształceniem zbioru $\mathscr{B}$ w B.

Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna nawet przy bardzo ogólnych założeniach. Istnieje nawet nieskończenie wiele niezomorficznych zbiorów $\mathscr{B}$ posiadających żądaną własność. Dla osiągnięcia jednoznaczności nakłada się na $\mathscr{B}$ i Φ dodatkowy warunek. Żąda się mianowicie,

aby każde dwa T-przekształcenia zbioru $\mathscr{B}$ w dowolny zbiór B gatunku T, które są identyczne na obrazie $\Phi(A)$ zbioru A, były identyczne na całym B. Otrzymany zbiór $\mathscr{B}$ nosi nazwę *zbioru uniwersalnego* stowarzyszonego z A, a przekształcenie Φ nazwę *przekształcenia uniwersalnego* stowarzyszonego z A.

PRZYKŁADY. a). Grupa zwarta stowarzyszona z grupą topologiczną. W tym przypadku A jest ustaloną grupą topologiczną, T — gatunkiem grup topologicznych zwartych, a $(S-T)$- oraz T-przekształcenia homomorfizmami ciągłymi. Zbiór $\mathscr{B}$ nazywa się grupą zwartą stowarzyszoną z A.

Można wykazać, że zbiór funkcji prawie okresowych na A jest identyczny ze zbiorem funkcji postaci $g \circ \Phi$, gdzie g jest dowolną funkcją ciągłą na $\mathscr{B}$.

Z powyższego przykładu widać, że zbiory uniwersalne mogą mieć duże znaczenie dla analizy.

b) Iloczyn tensorowy dwu przestrzeni wektorowych. W tym przypadku A jest iloczynem (kartezjańskim) dwu przestrzeni wektorowych (rzeczywistych) E_1 i E_2, T jest gatunkiem przestrzeni wektorowych rzeczywistych, $(S-T)$-przekształceniami są przekształcenia dwuliniowe określone na $E_1 \times E_2$, a T-przekształceniami zwyczajne przekształcenia liniowe. Przestrzeń wektorową uniwersalną $\mathscr{B}$ nazywa się iloczynem tensorowym przestrzeni E_1 i E_2. Rozpatrywanie iloczynu tensorowego pozwala sprowadzić badanie przekształceń dwuliniowych określonych na $E_1 \times E_2$ do badania przekształceń liniowych określonych na $\mathscr{B}$.

Zacytujmy jeszcze kilka przykładów zbiorów uniwersalnych:

Struktury algebraiczne wolne, pierścienie i ciała ułamków, uzupełnienie przestrzeni jednostajnej, uzwarcenie Čocha-Stone'a, grupy topologiczne wolne, rozmaitość Albanèse (w geometrii algebraicznej).

Kategorie i funktory. Teoria „kategorii" jest najmłodszym z wielkich narzędzi matematyki. Nic nie świadczy tak silnie o jedności matematyki jak właśnie ona. Stanowi ona nowy krok naprzód w dziedzinę abstrakcji. Istotnie, zajmuje się ona nie relacjami między elementami jakiegoś ustalonego zbioru, ale relacjami między przedmiotami ustalonej „kategorii", a nawet relacjami między różnymi kategoriami. Fakt, że taka ogólność nie pociąga za sobą trywialności ani nawet ubóstwa tej teorii, nosi znamiona cudu. A jednak tak jest, teoria ta jest w wielu dziedzinach nieodłącznym przewodnikiem młodej generacji matematyków.

Ograniczymy się tutaj jedynie do podania kilku definicji.

Najpierw kilka przykładów kategorii: kategoria grup, kategoria przestrzeni wektorowych, przestrzeni topologicznych, zbiorów uporządkowanych i ogólniej — kategoria zbiorów opatrzonych strukturą pewnego gatunku z wyróżnioną klasą morfizmów.

Kategoria nie jest więc zbiorem; wygodnie jest wyobrazić ją sobie jako pewną klasę przedmiotów, rozumiejąc przez klasę coś szerszego niż zbiór.

Niech więc $\mathscr{C}$ będzie klasą przedmiotów. Załóżmy, że każdej parze elementów $x, y \in \mathscr{C}$ odpowiada *zbiór* oznaczony symbolem $\mathrm{Hom}(x, y)$, którego elementy będziemy nazywać *homomorfizmami* lub morfizmami x w y, a każdej trójce elementów $x, y, z \in \mathscr{C}$ odpowiada przekształcenie $(f, g) \to g \circ f$ zbioru $\mathrm{Hom}(x, y) \times \mathrm{Hom}(y, z)$ w zbiór $\mathrm{Hom}(x, z)$, zwane *złożeniem*.

Powiemy, że zbiór $\mathscr{C}$, wraz z odpowiednimi homomorfizmami i prawem ich składania, jest kategorią, jeśli spełnione są następujące aksjomaty:

K_1 — Łączność składania homomorfizmów: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

K_2 — Dla każdego $x \in \mathscr{C}$ w zbiorze $\mathrm{Hom}(x, x)$ istnieje element e_x, zwany *identycznością* na x, taki że dla dowolnego homomorfizmu f mamy $e_x \circ f = f$ oraz $f \circ e_x = f$ (jeśli te wyrażenia mają sens).

Izomorfizmem x w y (gdzie x i y należą do kategorii $\mathscr{C}$) nazywamy każde $u \in \mathrm{Hom}(x, y)$, dla którego istnieje $v \in \mathrm{Hom}(y, x)$ takie, że $u \circ v = e_y$ oraz $v \circ u = e_x$.

Funktory ustalają relacje między różnymi kategoriami. Niech $\mathscr{C}$ i $\mathscr{C}'$ będą dwiema kategoriami. Załóżmy, że określona jest reguła F, która każdemu $x \in \mathscr{C}$ przyporządkowuje pewne $x' \in \mathscr{C}'$ — będziemy je oznaczać symbolem $F(x)$ — a każdej parze elementów $x, y \in \mathscr{C}$ i dowolnemu $u \in \mathrm{Hom}(x, y)$ pewien homomorfizm $u' \in \mathrm{Hom}(x', y')$, który będziemy oznaczać symbolem $F(u)$.

Regułę F nazywamy funktorem gdy:

1) Jeśli u jest identycznością, to $F(u)$ jest również identycznością;

2) Dla wszelkich u, v takich, że złożenie $u \circ v$ jest określone mamy: $F(u \circ v) = F(u) \circ F(v)$.

Opierając się na tych dwu podstawowych pojęciach — kategorii i funktora — można określić całą „algebrę", której bogactwo wzrasta w miarę specjalizacji kategorii. Pokażemy, na prostym przykładzie, w jaki sposób można używać teorii kategorii za przewodnika. W oparciu o badanie rozmaitych klasycznych kategorii „konkretnych", w których istnieje pojęcie iloczynu kartezjańskiego (zbiory uporządkowane, grupy, przestrzenie topologiczne) wyprowadza się schemat definicji iloczynu kartezjańskiego dający się opisać w kategoriach ogólnych i określa się pojęcie *kategorii z iloczynem kartezjańskim*. Odtąd, spotykając nową kategorię konkretną, w której iloczyn kartezjański jeszcze nie jest określony, można sprawdzać, w oparciu o ogólny schemat, czy iloczyn daje się w niej określić — definicja iloczynu jest już gotowa.

Reasumując: Opisaliśmy kilka narzędzi o charakterze bardzo ogól-

nym (pominęliśmy zresztą bardzo wiele, żeby wspomnieć tylko o ciągach dokładnych i diagramach, z których korzysta się stale w algebrze i topologii algebraicznej). Stosowanie tych narzędzi łączy się ściśle z użyciem pewnej, bardzo precyzyjnej symboliki, której zakres zastosowań stale się rozszerza. Powstaje w ten sposób nowy język, niedostępny dla profanów, jasny i sugestywny dla wtajemniczonych.

Jest rzeczą oczywistą, że narzędzia o których mowa nie są czymś w rodzaju kamienia filozoficznego. Nie potrafią one zastąpić sił twórczych i warte są tylko tyle, ile wart jest rzemieślnik.

Metody odkrywania nowych faktów związane z aksjomatyką

Najwspanialsza metoda i najdoskonalsze narzędzia nie potrafią zastąpić zdolności twórczej, potrafią one jednak znacznie zwiększyć wydajność twórczości. Po wyliczeniu kilku przydatnych narzędzi używanych przy badaniu teorii aksjomatycznych poddamy analizie kilka metod odkrywania nowych faktów. Metody te mogą mieć znaczenie jedynie przy badaniu wieloznacznych teorii aksjomatycznych. Choć prawdą jest, że każdy poważny badacz odkrywa te metody na nowo, to wyliczenie ich tutaj może nie jest jednak całkiem pozbawione znaczenia.

1. Metoda osłabiania aksjomatów. Pewien analityk wierzy w prawdziwość zdania E dotyczącego struktury rozgałęzionej S, określonej przez znaczną liczbę aksjomatów. Zdanie E zachowuje sens w pewnym systemie aksjomatycznym S', złożonym z mniejszej liczby aksjomatów, co wcale zresztą nie znaczy, że E jest w S' prawdziwe. Analityk nasz może się posłużyć metodą polegającą na osłabianiu badanego systemu aksjomatycznego S do systemu S'. Spróbuje on mianowicie udowodnić E w systemie S'. Mniejsza liczba aksjomatów w S' może mu nawet ułatwić znalezienie dowodu. Jeśli jego starania uwieńczy sukces, to albo udowodni on E w systemie S', a więc i w S, albo znajdzie w S' „kontrprzykład" C na zdanie E, tj. pokaże, że E nie jest prawdziwe w S'. Staranne badanie C pozwoli mu być może na sformułowanie własności P, która dołączona do aksjomatów systemu S' gwarantowałaby prawdziwość E. Wraca on wówczas do systemu S i stara się w nim udowodnić P; jeśli mu się to uda, ma gotowy dowód zdania E.

2. Metoda wzmacniania aksjomatów. Poprzednia metoda polegała na chwilowym usunięciu pewnej liczby aksjomatów systemu S. Druga metoda badawcza, o której chcemy tu wspomnieć, polega na dodaniu nowych aksjomatów, tj. na badaniu przypadków szczególnych.

Dodatkowe aksjomaty pozwalają na użycie środków, którymi nie rozporządzaliśmy w systemie S. Przy ich pomocy można otrzymać zupełnie nieoczekiwane dowody, mogą one również nasunąć ciekawe hipo-

tezy. Na zakończenie rozważań należy wrócić do S i spróbować zmodyfikować w odpowiedni sposób uzyskane wyniki.

Dobrze znanym szczególnym przypadkiem tej metody jest badanie modeli dyskretnych i skończonych. Teoria procesów Markowa, stanowiąca część rachunku prawdopodobieństwa, zawdzięcza na przykład bardzo wiele badaniom procesów na zbiorach dyskretnych i skończonych. Podobnie w teorii potencjału: przeprowadzając badanie jąder na zbiorach skończonych, odkrywamy zjawiska, których istnienia nie moglibyśmy nawet podejrzewać znając jedynie przypadek ogólny.

3. Badanie struktur sąsiednich. Często zdarza się, że nie udaje się nam udowodnić w strukturze rozgałęzionej S zdania E, o którym wiemy, że jest prawdziwe w strukturze S', różniącej się niewiele od S. Należy zbadać wówczas dokładnie dowód E w S'. Większość stanowiących go lematów zachowa w S swą wartość. Trzeba zbadać pozostałe, sformułować je nieco inaczej, postarać się otrzymać z nich zdania prawdziwe w S.

Obecnie na przykład, ponieważ nie potrafimy jeszcze udowodnić hipotezy Riemanna, badamy zagadnienia pokrewne dotyczące ciał skończonych. Mamy nadzieję bądź to przenieść część uzyskanych wyników na przypadek klasyczny, bądź nawet zamknąć przypadek klasyczny ze wszystkimi przypadkami szczególnymi w ramach jednego zagadnienia arytmetyczno-algebraicznego. Być może nawet takie ogólne zagadnienie okaże się łatwiejsze do rozwiązania. Historia matematyki zna bowiem wiele przykładów na to, że nadanie zagadnieniu właściwej ogólności łączy się z wyzwoleniem pewnej jego giętkości i odkrywa często nowe drogi dowodowe.

Należy jednak strzec się przed dość popularnym błędem polegającym na tym, że gdy nie potrafi się rozwiązać pewnego trudnego zagadnienia, to rozwiązuje się łatwe zagadnienia sąsiednie i rozwiązanie ich liczy się sobie za postęp w badaniu zagadnienia zasadniczego. Prace tego typu są świetną metodą przygotowania się do rozwiązania zagadnienia, ale na ogół nie należy zmuszać bliźnich do ich czytania.

4. Tworzenie struktur odpowiadających danym wymaganiom. Przemysł potrafi skonstruować teraz na żądanie obrabiarki wykonujące najrozmaitsze skomplikowane prace. Bliscy jesteśmy dnia, gdy chemia potrafi zsyntetyzować włókna odpowiadające najbardziej wyspecjalizowanym potrzebom odbiorcy. Podobnie w matematyce — teoria kategorii pozwala obecnie konstruować struktury odpowiadające dokładnie wymogom rozważanego zagadnienia. Nastawienie umysłu współczesnego młodego matematyka nie przypomina w niczym nastawienia konstruktora zwalczającego opór materiału. Matematyk nie buduje już potrzebnych mu skomplikowanych tworów metodą kolejnych przybliżeń, wychodząc z części, którymi rozporządza. Tworom tym narzuca tylko pewne wzajemne

związki (nie prowadzące do sprzeczności) i robi z nich kategorię. Kategorię tę może już badać za pomocą całego aparatu, którym rozporządza. Realizacja obiektów tej kategorii przez konkretne zbiory zaopatrzone w strukturę pewnego typu jest jednym z ostatnich etapów jego poszukiwań.

Kilka własności charakterystycznych badań Bourbakiego w zakresie analizy

Zrobiliśmy krótki przegląd narzędzi i metod rozumowania. Zobaczmy obecnie ich działanie na przykładzie badań — zbiorowych lub indywidualnych — prowadzonych przez Bourbakistów.

1. Aksjomatyka i wieloznaczność. Zgodnie ze swymi zasadami Bourbaki wykazuje skłonność do struktur wieloznacznych. Bardzo lubi on sformułowania ogólne: „Jeśli nie trzeba za to zbyt drogo płacić, warto budować teorię w sposób jak najbardziej ogólny". Wynika stąd oczywiście duża oszczędność myślenia, a czasami i konieczność zmuszenia czytelnika do bardziej abstrakcyjnego myślenia.

Nie tylko więc rozważa się przestrzenie wektorowe nad dowolnym ciałem, ale wszędzie, gdzie tylko można, zastępuje się je modułami nad pierścieniem z jednością (co pociąga za sobą oczywiście potrzebę przyjęcia odpowiednich dla przypadku ogólnego definicji, a więc na przykład definicji iloczynu tensorowego). Podobnie, równań różniczkowych postaci $x = f(x, t)$ nie bada się w przypadku skończenie wymiarowym, ale w ogólnych przestrzeniach liniowych. O funkcji $f(x, t)$ zakłada się jedynie, że jest lipschitzowska ze względu na x, ze względu zaś na t jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji schodkowych (tj. przedziałami stałych).

2. Bourbaki jest przede wszystkim algebraikiem. Ci, którzy powołali go do życia, odkrywali algebrę u wielkich algebraików niemieckich, w czasach gdy we Francji nic jeszcze nie wiedziano o algebrze nowoczesnej. Ich prace z zakresu analizy są przesycone algebrą i symboliką algebraiczną. Jest to oczywiście nie tylko algebra zbiorów, ale i teoria grup, algebra liniowa i wieloliniowa, dwoistość. Smakują oni w przekształceniach, we własnościach dających się wyrazić w postaci związków algebraicznych.

Jeśli jakaś teoria należąca z dawien dawna do analizy daje się zalgebraizować, całkowicie lub tylko częściowo, żaden Bourbakista nie oprze się pokusie zalgebraizowania jej.

Kiedyś analiza polegała w zasadzie na badaniu funkcji określonych na R lub R^n i tamże przyjmujących wartości, oraz na badaniu operacji pochodnej i całki. Dziś dla Bourbakisty R jest przede wszystkim ciałem przemiennym o charakterystyce zero i to mu na ogół wystarcza. Jeśli

naprawdę potrzebuje R, to wie doskonale, że będzie korzystał tylko z lokalnej zwartości i z własności porządku.

W rękach C. Chevalleya teoria grup i algebr Liego pozbywa się swego pierwotnego charakteru. Analiza odgrywa w niej bardzo ograniczoną rolę: służy do dowodu istnienia tworu o takich to a takich własnościach lub do zdefiniowania pewnych operacji. Różniczkowanie na przykład ze swych własności zachowuje jedynie tę, że jest przekształceniem liniowym pewnej algebry w siebie, spełniającym warunek $D(xy) = xD(y) + D(x)y$.

Podobnie H. Cartan oczyszcza teorię funkcji wielu zmiennych zespolonych. Całkowanie pozostaje wprawdzie nadal podstawowym narzędziem tej teorii, jego własnościom jednak — po gruntownym ich zbadaniu — można, jak się okazuje, nadać charakter algebraiczny i później odwoływać się jedynie do owych algebraicznych własności całkowania. W swej książce „Elementarna teoria funkcji analitycznych jednej i wielu zmiennych zespolonych" staje raczej na stanowisku Weierstrassa niż Cauchy'ego — w pierwszym rozdziale bada algebraiczne własności szeregów formalnych (reguły ich mnożenia, odwracania, różniczkowania) i z własności tych stara się wyciągnąć maksimum informacji mających znaczenie dla rozważanej teorii. Przy przedstawieniu teorii potencjału korzysta przede wszystkim z pojęć algebraicznych: wzór na splot jąder, interpretacja wymiatania jako rzutu ortogonalnego w pewnej przestrzeni Hilberta.

3. Stałe odnawianie traktatu. Traktat Bourbakiego nie jest bynajmniej bilansem przeszłości; to dzieło młodych, żywa konstrukcja podlegająca nieustannej ewolucji, konstrukcja dążąca w przyszłość. Bourbaki wciela do swego traktatu najnowsze nawet osiągnięcia, jeśli tylko dowiodą one swej wartości. Rozwijając każdą strukturę przegląda, szukając powiązań, wszystkie najważniejsze gałęzie matematyki (znajdując niejednokrotnie niezwykle soczyste owoce o niespodziewanym smaku). Dawniej wydane zeszyty traktatu poddawane są przeróbkom; w nowym ujęciu korzysta się — w mniej lub bardziej jawnej postaci — z języka i wyników teorii kategorii. W nowym wydaniu topologii przywrócono na przykład prawo obywatelstwa przestrzeniom nichausdorffowskim, okazało się bowiem, że odgrywają one niepoślednią rolę w wielu dziedzinach matematyki, np. w geometrii algebraicznej. Poprawiony wykład równań cząstkowych liniowych ma być przedstawiony w języku dystrybucji; będzie się w nim szeroko korzystać z pojęcia splotu, z transformacji Fouriera i Laplace'a itp.

Trzeba tu jednak przyznać, że Bourbaki — mimo niemałej liczby mózgów — cierpi na pewne irracjonalne fobie. Świadczy o tym na przykład jego podejście do teorii miary, niewątpliwie interesujące, lecz zbyt sztywne

w swym ograniczeniu się do przestrzeni lokalnie zwartych i topologii Tichonowa (tj. topologii zbieżności punktowej). Przez oddanie pojęcia miary abstrakcyjnej do muzeum osobliwości zamknął on swym uczniom drzwi do rachunku prawdopodobieństwa, który, choć nie wypracował sobie jeszcze najlepszych narzędzi, okazuje ciągle wielką żywotność.

4. Wybór definicji. Wyszukiwanie właściwych definicji stanowi zasadniczą część pracy bourbakistów. Dziełu Bourbakiego zarzuca się niekiedy zbytni formalizm i przerost metody dedukcyjnej. Powiada się, że podaje on jedynie aksjomaty i wyciąga z nich wnioski, nie troszcząc się wcale o uzasadnienie doboru aksjomatów i twierdzeń. Robi on tak po prostu dlatego, że historia owych rozlicznych wyborów byłaby zbyt długa. Ktokolwiek próbował zaksjomatyzować jakąś teorię, w chwili podjęcia owej próby dość jeszcze mętną, wie świetnie, że właściwe aksjomaty odnajduje się dopiero po wielu nieudanych próbach. Wie on również świetnie, że lepiej nie opisywać później swych nieudanych prób, owej mnogości pokrewnych aksjomatyk, bo umysł czytelnika podzielony pomiędzy nie wszystkie, traci jedynie swój dynamizm i napięcie.

Prawdziwym uzasadnieniem właściwej aksjomatyki jest jej powodzenie.

Przyjrzyjmy się, w jaki sposób Bourbaki wybiera definicje. Analiza klasyczna wychodziła zawsze z definicji „naturalnych" — umotywowanych danym kontekstem historycznym. Z owych definicji wyprowadzono kluczowe twierdzenia, później kontynuowano rozwijanie teorii, zachowując oczywiście początkowe definicje.

U Bourbakiego odkrycie kluczowego twierdzenia pociąga za sobą zmianę definicji. Mówiąc obrazowo (choć nieściśle), przyjmuje on owe kluczowe twierdzenia za definicje. Na tym właśnie polega jedna z podstawowych cech „*bourbakizacji*" teorii.

Mówiąc ściślej, jeśli z pewnego twierdzenia wynika, że obiekty klasy E, określonej za pomocą definicji D, posiadają własność wyrażoną zdaniem P i jeśli łatwiej jest posługiwać się zdaniem P lub zdanie to ma sens w dziedzinie szerszej niż D, to Bourbaki podstawia P w miejsce D. Otrzymuje on w ten sposób albo równoważną, ale wygodniejszą definicję klasy E, albo rozszerza zakres obiektów opisywanych przez rozważaną teorię do klasy E' zawierającej E.

Oto kilka przykładów tej owocnej metody:

a) Miary Radona. Z pewnego twierdzenia F. Riesza wynika, że na prostej R pojęcie całki Stieltjesa (ze względu na pewną funkcję o wahaniu lokalnie skończonym) jest identyczne z pojęciem funkcjonału liniowego i ciągłego na przestrzeni $\mathscr{K}(R)$ ciągłych funkcji rzeczywistych znikających poza pewnym zbiorem zwartym.

Druga z tych definicji ma znaczną przewagę nad pierwszą. Daje się

ona natychmiast uogólnić i to nie tylko na R^n, ale na wszelkie przestrzenie lokalnie zwarte; jest bardzo wygodna przy badaniu operacji na miarach (iloczyn miar, obraz miary itp.), nie mówiąc już o tym, że świetnie nadaje się do definicji topologii Tichonowa w przestrzeni miar, jak pokazuje doświadczenie najbardziej wygodnej z topologii.

Tymi względami podyktowany jest wybór definicji miary Radona. Historia wykazała, że wybór ten był szczęśliwy nie tylko dla teorii całki. Szybko zorientowano się w zaletach podobnego postępowania. Miara Radona była po prostu ciągłą formą liniową na pewnej przestrzeni wektorowo-topologicznej. Wystarczyło uczynić jeden krok, aby rozporządzać natychmiast płodną metodą definiowania nowych obiektów. Niech V będzie dowolną przestrzenią wektorowo-topologiczną; zbiór ciągłych form liniowych określonych na V stanowi nową przestrzeń wektorową V', dwoistą do V — elementy tej przestrzeni stanowią nową, interesującą klasę obiektów. Teoria dwoistości, obecnie dostatecznie rozwinięta, pozwala określać w V' rozmaite topologie, które ułatwiają badanie przestrzeni V'. Przestrzeń V' można przyporządkować dowolnej przestrzeni V — jakie bogactwo możliwości otrzymuje się w ten sposób! Zauważymy tylko, że prądy de Rhama, dystrybucje L. Schwartza i uogólnione powierzchnie L. C. Younga podpadają pod ten ogólny schemat.

b) Miary niezmiennicze na grupie. Całkę (Lebesgue'a) na prostej R można określić wychodząc z pojęcia całki dla funkcji ciągłych o nośnikach zwartych, za pomocą powszechnie znanego procesu przedłużania. Całka na $\mathscr{K}(R)$ jest funkcjonałem liniowym I, dodatnim (tj. takim, że $I(f) \geqslant 0$ dla funkcji $f \geqslant 0$) i niezmienniczym względem przesunięć (tj. spełniającym warunek $I(f) = I(g)$ dla każdej pary funkcji f, g, takiej że f powstaje z g przez przesunięcie).

Jak się okazuje, można udowodnić, że każdy posiadający te dwie własności funkcjonał liniowy I na $\mathscr{K}(R)$ różni się od całki Lebesgue'a jedynie stałym czynnikiem. Wynika stąd możliwość aksjomatycznego określenia całki Lebesgue'a (z dokładnością do pewnego czynnika): jest to funkcjonał liniowy na $\mathscr{K}(R)$, dodatni i niezmienniczy względem przesunięć prostej. Ta nowa definicja jest użyteczna nie tylko dlatego, że — wyzwolona z balastu konstrukcji efektywnej — pokazuje dobitnie, które własności całki są istotne i użyteczne, ale również i dlatego, że jest ona dostosowana do ogólniejszego przypadku dowolnych grup lokalnie zwartych.

c) Funkcje mierzalne. Klasyczna definicja przekształcenia mierzalnego przestrzeni R^n w R powiada, że

f jest mierzalne, jeśli dla każdej liczby rzeczywistej λ zbiór tych x-ów, że $f(x) \leqslant \lambda$, jest mierzalny (w sensie Lebesgue'a).

Twierdzenie Łuzina powiada, że definicja ta równoważna jest następującej definicji:

f jest mierzalna, jeśli dla każdego zbioru zwartego $K \subset R^n$ i dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $K' \subset K$, taki że 1) miara różnicy symetrycznej $(K \dot{-} K')$ jest mniejsza od ε; 2) funkcja f obcięta do K' jest ciągła.

Własność interweniująca w drugiej definicji jest bardzo sugestywna i wygodna w wielu zastosowaniach. Z drugiej strony, zachowuje ona sens i pozostaje ciekawa po zastąpieniu miary bardziej ogólnymi funkcjami zbioru, na przykład rozważaną w teorii potencjału pojemnością. Pozwala ona wreszcie zdefiniować natychmiast pojęcie przekształcenia mierzalnego przestrzeni lokalnie zwartej (z miarą Radona) w dowolną przestrzeń topologiczną. Z tych właśnie powodów Bourbaki wybierze drugą definicję, a nie definicję klasyczną.

5. Wybór materiału i twierdzeń. Opracowując swój traktat Bourbaki musi bez przerwy wybierać. Pokazaliśmy już, czym się kieruje przy wyborze definicji; materiał, który ma zamiar włączyć do swojego dzieła, wybiera z równą pieczołowitością.

Obchodzą go przede wszystkim narzędzia, i to tylko te, które wykazały swą użyteczność. Wyniki „eleganckie", a nawet głębokie, nie zatrzymują jego uwagi, jeśli kończą tylko jakąś teorię albo prowadzą w ślepe uliczki. Bez wyrzutów sumienia eliminuje pojęcia bliskie tym, które uznał za podstawowe dla swego dzieła. Jeśli, jego zdaniem, jakaś teoria nie dojrzała jeszcze dostatecznie, aby wybrać pomiędzy kilku opisującymi ją aksjomatykami, to zwykle czeka do momentu jej dojrzałości. Nie lubi upiększeń, przystawek, drobnych teoryjek bez związku z całokształtem matematyki.

Buduje bardzo solidnie, podobnie jak starożytni Rzymianie. Jeśli jego dzieło okazuje się czasem piękne, zawdzięcza to jedynie urodzie swojej wewnętrznej struktury. Autora obchodzi przede wszystkim prostota, solidność, użyteczność i wydajność.

W topologii ogólnej, pierwszy po Hausdorffie, dokonał trzeźwego wyboru w dżungli rozmaitych pojęć: dobrał wygodne aksjomaty ogólnych przestrzeni topologicznych, właściwe pojęcie zwartości. Wprowadzenie pojęcia filtru (H. Cartan) pomogło uprościć zagadnienie związane ze zbieżnością. Pojęcie przestrzeni jednostajnej wykazało pokrewny charakter kilku pojęć traktowanych dotychczas jako istotnie różne. Związki przestrzeni jednostajnych z przestrzeniami zwartymi potwierdziły znaczenie tej teorii.

W analizie funkcjonalnej Bourbaki podnosi znaczenie pojęć i narzędzi mających znaczenie praktyczne: lokalnej wypukłości przestrzeni wektorowo-topologicznych, dwoistości twierdzenia o zamkniętym wykresie, twierdzenia o oddzielaniu zbiorów wypukłych, twierdzeń Kreina i Milmana, Stone'a i Weierstrassa itp.

W teorii całki rozpatruje — jak już wspominaliśmy — wyłącznie miary Radona na przestrzeniach lokalnie zwartych. Trzeba zaznaczyć, że w jego rękach stały się one narzędziem zadziwiająco sprawnym.

W bardziej „elementarnych" częściach swego dzieła rozpatruje zagadnienia klasyczne niezwykle ogólnie i z wielką oszczędnością środków. Twierdzenie o przyrostach skończonych formułuje dla funkcji przyjmujących wartości w przestrzeni unormowanej. Przeprowadza elementarną wprawdzie, ale wyczerpującą analizę własności funkcji wypukłych; rozważa wszystkie ich własności mogące mieć znaczenie dla analizy. Funkcje pierwotne określone są w zakresie funkcji będących jednostajnymi granicami ciągów funkcji schodkowych. Mówiliśmy już o ogólności jego „elementarnego" przedstawienia równań różniczkowych.

Analiza współczesna w świecie

Stwierdziłem na początku tej pracy, że zbadanie twórczości Bourbakiego i jego uczniów pozwoli nam wyrobić sobie właściwy pogląd na tendencje współczesnej analizy.

Teraz, poddawszy pobieżnej analizie najbardziej charakterystyczne cechy dzieła Bourbakiego, możemy próbować sprawdzić, czy zdanie to było słuszne. Otwórzmy w tym celu *Mathematical Reviews*. Kilkakrotne zanurzenie sondy pokazuje, że co najmniej dwie trzecie tego co robi się dziś mogłoby być zrobione za pomocą narzędzi, którymi rozporządzano trzydzieści lat temu. Bardzo wiele prac tego rodzaju zasługuje na uznanie. Niektóre z nich rozważają bardzo subtelne i trudne zagadnienia analizy. Wprowadza się w nich ważne pojęcia, tworzy i wypróbowuje nowe metody, ale zakres tych rozważań jest zawsze ograniczony.

Szkoda wielka, że ciągle jeszcze wielu autorów nie wie nic o istnieniu całego szeregu podstawowych narzędzi, których sprawność potwierdziła praktyka. Z wielkim nakładem pracy i pomysłowości odkrywają oni bowiem ciągle na nowo szczególne przypadki znanych twierdzeń ogólnych.

Autorzy pozostałej trzeciej części prac korzystają ze współczesnych narzędzi i metod. Między tymi pracami można oczywiście znaleźć — odpadki nieuniknione przy wszelkiej produkcji naukowej — prace pozbawione treści, które bynajmniej nie przyczyniają się do budowy „świątyni matematycznej". W najlepszych jednak pracach nowe narzędzia wykazują niezwykłą wydajność. Każdy rok przynosi rozwiązanie zagadnień powszechnie uważanych za niedostępne. Każdego roku powstają nowe mosty pomiędzy odległymi teoriami.

Oto lista najbardziej rozwijających się dziedzin analizy i jej pogranicza: grupy topologiczne i teoria Liego, algebra topologiczna, teoria miary i całki, funkcje wielu zmiennych zespolonych i rozmaitości analityczne (liczne narzędzia algebraiczne, snopy, przestrzenie włókniste),

równania cząstkowe (użycie dystrybucji i innych funkcji uogólnionych, przypadek nieliniowy), teoria potencjału (ogólne jądra, badanie aksjomatów, związek z teorią prawdopodobieństwa), analiza harmoniczna w grupach ogólnych, funkcje typu dodatniego, analiza funkcjonalna (przestrzenie wektorowo-topologiczne lokalnie wypukłe, wypukłość, spektralna teoria operatorów), topologia ogólna, geometria różniczkowa, topologia różniczkowa, teoria prawdopodobieństwa.

Wszystkie te dyscypliny, znajdujące się w stanie bujnej aktywności, rozwijają się zgodnie z tymi samymi prawami, które rządzą twórczością Bourbakiego. Używają tego samego języka. Na specjalnych kollokwiach, poświęconych różnym dyscyplinom, najwybitniejsi specjaliści używają tych samych metod, tego samego języka, interesują się tym samym. Rozwój najbardziej dynamicznych dziedzin analizy współczesnej świadczy zatem o jej wielkiej jedności.

Cóż wynika stąd dla nauczania

Od dawien dawna nauczanie dostosowuje się do postępów nauki, często jednak następuje to ze znacznym opóźnieniem. Cierpi na tym zarówno nauczanie, jak i nauka. Ostatnie pięćdziesiąt lat przyniosło w szczególności tak szybki rozwój nauki, że opóźnienie było niemal nie do uniknięcia. Dotyczy to również matematyki, której oblicze, dzięki rozwojowi teorii mnogości i stosowaniu metody aksjomatycznej, uległo całkowitej zmianie. Mamy wiele powodów do przeprowadzenia radykalnej i szybkiej odnowy na wszystkich szczeblach nauczania: uniwersyteckim, średnim i powszechnym.

Pierwszym z tych powodów jest troska o przyszłość matematyki. Rzeczy wielkich w matematyce dokonują nie starcy, nawet nie ludzie dojrzali — trzeba więc przygotować teren dla młodych. Aby umożliwić im asymilację, trzeba ich zapoznać z wielkimi ideami, które upraszczają matematykę. Aby ich nauczyć wychodzenia z trudnych sytuacji, trzeba ich zapoznać z teoriami unifikującymi naszą naukę, z teoriami, które przerzucają mosty pomiędzy różnymi dyscyplinami. Oczywiście nie obejdzie się bez poświęceń. Trzeba będzie zrezygnować z nauczania niejednej ładnej, polerowanej starannie całe wieki teorii, jeśli stanowi ona tylko izolowaną gałąź matematyki.

Drugi wzgląd, to (coraz liczniejsze) zastosowania matematyki. Z jednej strony, liczne pojęcia matematyczne stały się pożyteczne, lub nawet niezbędne, w pracy fizyka i technika, np. macierze, transformacje Fouriera i Laplace'a, równania cząstkowe, dystrybucje, pojęcie przestrzeni Hilberta itd., z drugiej zaś strony, nowa matematyka wniosła we wszystkie dziedziny wielkie uproszczenia i wielką oszczędność myśli, która nauczyć może czegoś równie dobrze fizyka i technika, jak i przyszłego matematyka.

Bez wątpienia ciągle jeszcze brak książek niezbędnych do dokonania tej odnowy. Matematycy poświęcili się całkowicie pracom badawczym i pozwolili na to, by między nauką i nauczaniem powstała szeroka fosa. Od dziesięciu lat mniej więcej, przerażeni szerokością owej fosy, zaczęli reagować. Z początku zreformowali uniwersyteckie nauczanie matematyki, później zwrócili się w stronę swych kolegów — nauczycieli szkół średnich i nawiązali z nimi owocną dyskusję. Przyszedł czas, aby nabrali odwagi i przystąpili natychmiast do zasadniczej pracy; minął już czas krytykowania i udzielania ogólnikowych wskazówek. Muszą oni przystąpić teraz do pisania książek, albo w pisaniu ich pomóc swym kolegom nauczycielom ze szkół technicznych i średnich. Nie idzie tu oczywiście o kalkowanie traktatu Bourbakiego, pisanego z myślą o zaawansowanym czytelniku, ale o przedstawienie w sposób dostosowany do każdego poziomu metod i pojęć współczesnej matematyki.

Nawet dla tych, którzy nie będą w przyszłości matematykami, ani nie będą w swej pracy z matematyki korzystać, nauczanie matematyki ma zasadnicze znaczenie. Dawno już stwierdzono zgodnie, że matematyka odgrywa wielką rolę przy kształtowaniu umysłu. Matematyka współczesna ma tu do odegrania jeszcze większą rolę niż klasyczna. Teoria mnogości wykładana w powiązaniu z logiką jest bardzo kształcąca i potrafi zachwycić ucznia. Prostota wieloznacznych systemów aksjomatycznych pozwala na studiowanie ich bez posiadania specjalnej wiedzy, zastosowania ich są dostatecznie szerokie, aby nie wydały się one uczniom czczą rozrywką.

Nie jest moim celem proponowanie tutaj jakiegoś programu, czy nawet szkicowanie jego głównych zarysów, ograniczę się jedynie do wyłuszczenia kilku wniosków, do których zdaje się prowadzić wszystko co powiedziałem wyżej.

Należy jak najwcześniej przyzwyczajać uczniów do myślenia w terminach zbiorów i operacji. Od wczesnej młodości powinni oni używać języka algebry i teorii mnogości. Język ten i związane z nim znakowanie są proste i przejrzyste. Liczne doświadczenia pokazały, że dzieci lubią się nim posługiwać.

Równolegle z algebrą zbiorów trzeba uczyć elementów logiki, w powiązaniu z gramatyką języka ojczystego. Niestety nawet 19-letni uczniowie rozumują bardzo niewprawnie. Nie umieją oni znaleźć zaprzeczenia danego zdania ani sformułować poprawnie twierdzenia czy definicji. Naukę takich rzeczy należy oczywiście zaczynać znacznie wcześniej.

Równie wcześnie uczniowie powinni rozumieć jasno pojęcie funkcji. W tym celu muszą nauczyć się znajdować wszędzie rozmaite przykłady funkcji: w algebrze, arytmetyce, geometrii, fizyce, życiu codziennym itd. Muszą zbadać podane przez siebie przykłady. Powinni również umieć superponować funkcje, znajdować funkcję odwrotną do danej funkcji różnowartościowej, rozpoznawać przekształcenia i grupy przekształceń.

Trzeba zapoznać ich stopniowo z zasadniczymi strukturami: równoważności, porządku, przestrzeni topologicznej, ze strukturami algebraicznymi. Struktury te mogą być badane, oczywiście w odpowiednim zakresie, od samego początku nauczania na poziomie średnim.

Nie należy oczywiście zapominać o tym, że celem nauczania jest przede wszystkim dostarczenie uczniom pewnych narzędzi i nauczenie ich posługiwania się nimi. Dlatego nie wolno gubić się w rozważaniach zbyt ogólnych — przeciwnie, trzeba iść najprostszą drogą do kluczowych twierdzeń zawierających w sobie wiele twierdzeń specjalnych, mających bezpośrednie zastosowania.

W geometrii elementarnej na przykład trzeba szybko pokazać strukturę afiniczną płaszczyzny i przestrzeni i zacząć stosować algebrę wektorów. Później należy, w taki czy inny sposób, wprowadzić iloczyn skalarny, który pozwoli sprowadzić zasadniczą treść geometrii metrycznej do kilku rachunków.

Podobnie na poziomie uniwersyteckim, trzeba dać studentowi podstawowe narzędzia, wyposażyć go w twierdzenia o przestrzeniach zwartych, w metrykę zbieżności jednostajnej, w twierdzenie Stone-Weierstrassa, metodę kolejnych przybliżeń itd. Należy również przyzwyczaić studentów do wyszukiwania struktur interweniujących w danym twierdzeniu. Wymaga to oczywiście odpowiedniego wyboru definicji i doboru sformułowań podkreślających te struktury. Całka Lebesgue'a na R^n powinna stać się dla nich (w pewnym stadium nauczania) dodatnim niezmienniczym względem przesunięć funkcjonałem liniowym na $\mathscr{K}(R^n)$. Laplasjan powinien być dla nich jedynym operatorem różniczkowym drugiego stopnia niezmienniczym względem przesunięć, itd.

Miejsce analizy w nauczaniu

Mówiłem w tej pracy bardzo wiele o matematyce w ogólności, a mało o samej analizie. Wynika to stąd, że nie można już, jak zauważyłem zresztą wyżej, dzielić nauczania matematyki na algebrę, geometrię i analizę.

Podstawę analizy stanowią, nawet przy nauczaniu na poziomie średnim, algebra (algebra zbiorów, badanie ciała R, algebra liniowa, teoria grup) i topologia. Ta sama baza algebraiczna jest niezbędna w nauczaniu geometrii (która na tym poziomie sprowadza się do badania dwu- lub trójwymiarowej przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym).

Powinno się więc pomyśleć o nauczaniu, którego niemi przewodnimi byłyby podstawowe struktury. Algebra i geometria wspieralyby się nawzajem. Algebra dałaby swoją symbolikę i rozmaite operacje, geometria zaś język przesycony znaczeniami intuicyjnymi. Geometria dostarczy analizie podstaw topologicznych, ważnego pojęcia wypukłości, prostych interpretacji całkowania i różniczkowania. Analiza natomiast zaopatrzy algebrę w bogatą kolekcję grup i przestrzeni wektorowych.

Myślenie matematyczne

Mówiłem tutaj prawie wyłącznie o zbudowanych już teoriach matematycznych, trochę wspomniałem również o metodach pracy badawczej. Nie chciałbym jednak kończyć tej rozprawy mającej służyć celom nauczania matematyki, nie poświęcając kilku nawet słów pewnym własnościom myślenia matematycznego.

Wszelkie myślenie matematyczne składa się z cyklów, większych lub mniejszych; w każdym z nich można wyróżnić z grubsza biorąc następujące stadia: obserwacja, matematyzacja, dedukcja, zastosowanie.

Te cztery stadia są bardzo istotne, w szczególności nie uwzględniające ich, czysto dedukcyjne nauczanie byłoby jałowe i krzywdziłoby ucznia.

Każdy z dużych cyklów odpowiada przyswojeniu sobie nowego pojęcia. Jego cztery etapy są niezbędne dla umysłu, pozwalają mu przejść z jednego stanu do drugiego. Dotyczy to zarówno badacza, jak i ucznia, który nigdy nie rozwinie działalności twórczej, jeśli nie pomożemy mu na trudnej drodze prowadzącej do poznania.

INSTITUT HENRI POINCARÉ