ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE VII (1963)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zadania

Gwiazdką * oznaczane są te zadania, których rozwiązanie nie jest znane autorowi ani redakcji, albo znane jest tylko rozwiązanie częściowe. Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, uwagi o zadaniach, nowe zadania itp.) należy nadsyłać pod adresem: Andrzej Lelek, Wrocław 2, Plac Zgody 11/20. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane.

61. Funkcje ciągłe rzeczywiste zmiennej rzeczywistej, kawałkami liniowe, tworzą przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykazać, że ta przestrzeń jest nieprzeliczalnie wymiarowa, tj. każdy jej podzbiór przeliczalny zawiera się w pewnej właściwej podprzestrzeni liniowej.

Ju. M. Smirnow (Moskwa)

62. Niech $\boldsymbol{K}_1$ i $\boldsymbol{K}_2$ będą rodzinami wewnętrznie rozłącznych kół na płaszczyźnie, tzn. żadne dwa koła należące do $\boldsymbol{K}_i$ nie mają wewnętrznych punktów wspólnych ($i = 1, 2$). Dowieść, że jeśli te rodziny pokrywają tę samą część płaszczyzny, to są identyczne, czyli że równość

$$\bigcup_{K \in \boldsymbol{K}_1} K = \bigcup_{K \in \boldsymbol{K}_2} K$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{K}_2$.

H. G. Bothe (Berlin)

63. Zbudować przekształcenie otwarte półpłaszczyzny domkniętej na całą płaszczyznę, tj. odwzorowanie ciągłe f półpłaszczyzny $E^2_+ = \{(x, y): y \geqslant 0\}$ na płaszczyznę E^2 takie, że jeśli zbiór $G \subset E^2_+$ jest otwarty w E^2_+, to jego obraz $f(G)$ jest otwarty w E^2. Uogólnić ten wynik na n-wymiarową przestrzeń euklidesową E^n dla $n \geqslant 2$.

Jan Mycielski (Wrocław)

64. Niech $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ będą ciągami liczb dodatnich, takimi że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i} < \infty,$$

i niech R będzie przestrzenią metryczną, której punktami są ciągi $\{r_i\}$

liczb wymiernych, spełniające warunek

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|r_i|}{a_i} < \infty,$$

a odległość ϱ jest określona wzorem

$$\varrho(p, q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|p_i - q_i|}{b_i},$$

dla $p = \{p_i\} \in R$ i $q = \{q_i\} \in R$. Udowodnić, że przestrzeń R jest zerowymiarowa, tj. $\dim R = 0$.

A. Lelek (Wrocław)

65. Dowieść, że każdy jednorodny wielomian (n zmiennych) stopnia parzystego daje się przedstawić jako różnica dwóch wielomianów nieujemnych.

A. Pełczyński (Warszawa)