ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IV (1960)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

A. ZYGMUND (Chicago)

Józef Marcinkiewicz

Józef Marcinkiewicz urodził się dnia 30 marca 1910 r. w Sokółce w województwie białostockim. Zakończył życie w okolicznościach bliżej nieznanych, w czasie nieokreślonym, prawdopodobnie wiosną 1940 r. Pierwsza jego praca naukowa ukazała się w roku 1933, ostatnia latem 1939 r. Bardzo krótka — bo tylko sześcioletnia — działalność naukowa zostawiła jednak wyraźny ślad w matematyce i gdyby nie przedwczesny zgon, byłby on prawdopodobnie jednym z czołowych matematyków w skali światowej. Biorąc pod uwagę to co zdążył on osiągnąć w ciągu swego krótkiego życia i co mógłby osiągnąć w warunkach normalnych, należy uważać jego przedwczesną śmierć za wielki cios dla matematyki polskiej i może najcięższą indywidualną jej stratę w okresie drugiej wojny światowej.

W artykule niniejszym chciałbym podać opis działalności matematycznej Marcinkiewicza i wyników przez niego otrzymanych. Byłem jego profesorem na uniwersytecie wileńskim, wprowadziłem go do pracy badawczej w matematyce, zainteresowałem zagadnieniami, które wówczas bardzo mnie obchodziły. Później współpracowaliśmy naukowo, napisaliśmy szereg wspólnych prac, lecz jego rozwój naukowy był tak szybki, a oryginalność pomysłów tak wielka, że w niektórych działach mojej własnej specjalności mogę się tylko uważać za jego ucznia i kontynuatora.

Już pierwsze wyniki otrzymane przez Marcinkiewicza były poważne i zwróciły na niego uwagę wybitnych specjalistów naukowych za granicą. W okresie powojennym, gdy z biegiem czasu większa ilość matematyków zaznajomiła się z jego pracami, w szczególności gdy zajęto się pracami przejściowo przeoczonymi, wysoka opinia o Marcinkiewiczu jeszcze bardziej wzrosła. Okazało się bowiem, że prace te zawierają owocne pomysły umożliwiające dalszy postęp. Proces ten nie jest jeszcze zakończony, gdyż niektóre z prac Marcinkiewicza zawierają tylko sformułowania twierdzeń, bez dowodów, i trzeba będzie pewnego czasu, zanim zawarte tam pomysły zostaną wchłonięte i zasymilowane. Już teraz można jednak uważać, że Marcinkiewicz był jedną z najwybitniejszych

postaci w matematyce polskiej i może, obok Stanisława Zaremby, Leona Lichtensteina i Juliusza Schaudera, najwybitniejszym w tzw. analizie klasycznej.

Spotkałem się z Marcinkiewiczem po raz pierwszy jesienią 1930 roku, gdy wstąpił on na wydział Matematyczno-Przyrodniczy Uniwersytetu Stefana Batorego w Wilnie. Było tam wówczas trzech profesorów matematyki: Juliusz Rudnicki, Stefan Kempisty (obaj dziś już nie żyjący) i ja. Wszyscy od razu zwróciliśmy uwagę na Marcinkiewicza jako wyjątkowo utalentowanego i górującego swą umysłowością nad kolegami. W tej chwili, po latach prawie trzydziestu, trudno pamiętać wiele szczegółów z owego okresu, ale jeden utkwił mi wyraźnie w pamięci. Pierwszy rok studiów uniwersyteckich zawierał tylko wykłady elementarne, jak rachunek różniczkowy i całkowy, wykładany przez prof. Kempistego, algebrę wyższą, wykładaną przez prof. Rudnickiego, i geometrię analityczną — przeze mnie. Na rok akademicki 1931/32, który był drugim rokiem studiów Marcinkiewicza, ogłosiłem wykład z teorii szeregów trygonometrycznych poprzedzony wstępem do teorii całki Lebesgue'a. Byłem wtedy początkującym profesorem (drugi rok mojej profesury), szeregi trygonometryczne były moją specjalnością i bardzo mi zależało na zainteresowaniu kogoś młodego tym tematem. Wykład, planowany ambitnie, był stanowczo za trudny dla przeciętnego studenta drugiego roku, ale byłem pewien, że nie będzie zbyt trudny dla Marcinkiewicza. Dla uczęszczania na ten wykład, ze względu na dość sztywny program studiów, Marcinkiewicz musiał się zwrócić do mnie o pozwolenie. Bardzo mi zależało na tym, aby to zrobił, ale sam nie miałem odwagi mu tego zaproponować. Ku memu głębokiemu zadowoleniu, Marcinkiewicz sam jednak zgłosił się do mnie. Był to początek naszej współpracy naukowej.

W przedwojennym prowincjonalnym Wilnie bliski kontakt między studentem i profesorem był naturalny i łatwy, a więc spędzaliśmy wiele czasu na dyskusjach matematycznych. Poza Marcinkiewiczem było w Wilnie kilku innych młodych matematyków, jego kolegów. Jeden z nich, Konstanty Sokół-Sokołowski, później doktor matematyki i starszy asystent U. S. B., stał się, jak i Marcinkiewicz, jedną z ofiar wojny. Szereg innych żyje jednak i ich osobiste wspomnienia z tego okresu mogłyby być ciekawe dla oświetlenia postaci Marcinkiewicza. Z natury rzeczy, kontakt osobisty tych ludzi z Marcinkiewiczem, zbliżonych do niego wiekiem, musiał być bliższy niż mój.

Gdy wspominam Marcinkiewicza, widzę w mej wyobraźni wysokiego przystojnego chłopca, żywego, wrażliwego, serdecznego, ambitnego, z dużym poczuciem honoru. Był towarzyski i nie unikał zabawy; w szczególności bardzo lubił tańce i grę w brydża. Stan jego zdrowia nie był najlepszy; miał słabe płuca i musiał dbać o siebie. Interesował

się sportem (może ze względu na stan zdrowia) i był dobrym pływakiem i narciarzem. Miał również inne zainteresowania intelektualne poza matematyką: powiedział mi pewnego razu, że wstępując na uniwersytet wahał się czy wybrać matematykę, czy też literaturę polską. Pochodził ze wsi z rodziny niezamożnej. Wnosząc z tego co mówił, zdaje się, że silny wpływ na jego rozwój i charakter miała matka.

Marcinkiewicz otrzymał magisterium z matematyki w 1933 roku, po trzech latach studiów. Już jego praca magisterska zawierała ciekawe i oryginalne wyniki; w szczególności zawierała dowód nowego i ważnego twierdzenia, że istnieje ciągła funkcja okresowa, której trygonometryczne wielomiany interpolacyjne odpowiadające równo odległym punktom węzłowym są rozbieżne prawie wszędzie. Praca ta, w postaci nieco zmienionej, została później przedstawiona jako praca doktorska. Po zdaniu magisterium, Marcinkiewicz spędził rok na odbyciu służby wojskowej, po czym wrócił do Wilna na stanowisko młodszego asystenta przy katedrach matematyki. Doktoryzował się w roku 1935, habilitował w roku 1937, również w Wilnie. Rok akademicki 1935/36 spędził we Lwowie na stypendium Funduszu Kultury Narodowej. Współpracował tam z Kaczmarzem i Schauderem. W szczególności wpływ Schaudera był tu bardzo owocny i doprowadziłby prawdopodobnie do pięknych wyników, gdyby czas na to pozwolił. Marcinkiewicz miał bowiem w dziedzinie funkcji zmiennej rzeczywistej wyjątkową intuicję i technikę, a wyniki, które otrzymał w teorii tzw. funkcji sprzężonych (czasami nazywanych całkami Hilberta), gdyby były rozszerzone na funkcje wielu zmiennych, dałyby były, jak to widzimy teraz, mocny impuls w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Jedyny ślad wpływu Schaudera to piękna praca Marcinkiewicza o multyplikatorach szeregów Fouriera, która powstała w związku z zagadnieniem postawionym przez Schaudera, praca często cytowana w literaturze. Prawdopodobnie pod wpływem Kaczmarza Marcinkiewicz zainteresował się ogólnymi szeregami ortogonalnymi, o których napisał szereg prac.

Jesienią 1936 roku Marcinkiewicz wrócił do Wilna, gdzie otrzymał starszą asystenturę. Wiosną 1939 roku otrzymał stypendium Funduszu Kultury Narodowej na wyjazd za granicę i wyjechał do Paryża. W tym samym mniej więcej czasie uniwersytet poznański ofiarował mu katedrę nadzwyczajną matematyki i oczekiwano, że nominacja będzie zatwierdzona na początek nowego roku akademickiego. W drugiej połowie sierpnia tegoż roku, pod wpływem wiadomości o grożącej wojnie i mobilizacji w kraju, Marcinkiewicz postanowił wrócić. Nie musiał tego robić i koledzy w Anglii, gdzie wtedy przebywał, namawiali go, by pozostał dłużej, ale poczucie obowiązku moralnego, które zawsze było mocne u niego, przeważyło. Dnia drugiego września 1939 r. spotkałem go przy-

padkowo na ulicy w Wilnie, już w mundurze wojskowym (był oficerem rezerwy). Umówiliśmy się spotkać tego samego dnia wieczorem, ale widocznie okoliczności mu na to nie pozwoliły, gdyż nie zjawił się w umówionym miejscu. W kilka miesięcy po kampanii wrześniowej przyszły wiadomości, że jest w niewoli i że prosi o książki matematyczne. To były zdaje się ostatnie wiadomości o Marcinkiewiczu.

Według informacji rodziny Marcinkiewicza, po powrocie z zagranicy przywiózł on ze sobą plik rękopisów matematycznych, które, odchodząc do wojska, oddał rodzicom na przechowanie. W czasie zawieruchy wojennej rodzice zmarli i ślad po rękopisach zaginął.

Chciałbym teraz omówić szczegółowiej wyniki otrzymane przez Marcinkiewicza. Bibliografia, zdaje się kompletna, prac Marcinkiewicza podana jest na końcu artykułu; zawdzięczam ją p. doc. Starkowi. Towarzyszy jej lista, znacznie mniej zupełna, prac, które bądź mają punkty wspólne z wynikami Marcinkiewicza, bądź też są ich kontynuacją. Pozycje pierwszej listy drukowane będą kursywą, drugiej antykwą. Przy omawianiu prac pominę kilka o mniejszym znaczeniu, bądź też dotyczące tematów, na których się mało znam. Może niniejszy artykuł skłoni młodych matematyków polskich do zajęcia się bliżej pracami Marcinkiewicza; na pewno tego nie pożałują!

Głównym polem działalności Marcinkiewicza były: a) funkcje zmiennej rzeczywistej, b) szeregi trygonometryczne, c) interpolacja i teoria wielomianów trygonometrycznych, d) operacje funkcyjne, e) szeregi ortogonalne, f) funkcje zmiennej zespolonej, g) rachunek prawdopodobieństwa. Tematy te omówię po kolei.

Funkcje zmiennej rzeczywistej

Niech P będzie zbiorem liniowym domkniętym miary dodatniej, zawartym w przedziale skończonym (a, b), i niech $\varphi(x)$ oznacza odległość punktu x od zbioru P. Przyjmijmy dla prostoty, że a i b są końcami P. Funkcja $\varphi(x)$ jest więc równa zeru w zbiorze P, liniowa dla $x \leqslant a$ oraz $x \geqslant b$, i w każdym przedziale przyległym do P i mającym długość d ma za wykres dwa ramiona trójkąta równoramiennego o wysokości $\frac{1}{2}d$. Jednym z najciekawszych wyników Marcinkiewicza jest twierdzenie, że *dla dowolnego* $\lambda > 0$ *całka* (nieraz nazywana *całką Marcinkiewicza*)

$$\int_a^b \frac{\varphi^\lambda(t)}{|x-t|^{\lambda+1}}\,dt \tag{1}$$

jest skończona dla prawie wszystkich punktów x *zbioru* P.

Marcinkiewicz udowodnił to twierdzenie w nieco innej postaci rozważając w (1) zamiast $\varphi(x)$ funkcję $\psi(x)$ równą zeru na P i równą d w każdym przedziale przyległym do P i mającym długość d, ale dowody w obu przypadkach są analogiczne, a funkcja φ jest łatwiejsza do użycia niż ψ, zwłaszcza gdy rozważamy odpowiednik twierdzenia w przestrzeni n-wymiarowej. Dowód twierdzenia nie jest specjalnie trudny, a suma podobna do całki (1) w przypadku $\lambda = 2$ występuje nawet we wcześniejszej pracy Bezikowicza przy dowodzie istnienia funkcji sprzężonej (p. [1]); jest prawdopodobne, że Marcinkiewicz znał tę pracę. Zasługą Marcinkiewicza jest, że zrozumiał znaczenie tego wyniku, znacznie przekraczające indywidualne zastosowanie, i przez systematyczne użycie go potrafił otrzymać szereg pięknych twierdzeń z teorii szeregów trygonometrycznych, o czym niżej. Wynik ten pozostaje mało znany nawet teraz, a w wersji n-wymiarowej jest ważnym narzędziem w teorii tzw. całek mocno osobliwych (całek Hilberta), a pośrednio w teorii równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego.

W przypadku granicznym $\lambda = 0$ należy (1) zastąpić przez całkę

$$\int_a^b \frac{\{\log 1/\varphi(t)\}^{-1}}{|x-t|}\,dt. \tag{2}$$

Całka (1) omawiana jest przez Marcinkiewicza w pracach [*8*], [*9*], [*32*], [*48*]; całka (2) występuje w pracy [*5*]. Co do wyników nawiązujących do całek Marcinkiewicza oraz dalszych uogólnień, porównaj [25$_1$, str. 129], [18], [17], [13], [24], [3].

W pracy [*9*], w związku z zagadnieniami teorii szeregów trygonometrycznych, rozważane są tzw. pochodne Riemanna. Mówimy, że funkcja $f(x)$, określona w otoczeniu punktu x_0, ma w tym punkcie *k-tą pochodną Riemanna*, jeżeli iloraz

$$\frac{f(x_0+kh)-\binom{k}{1}f(x_0+(k-2)h)+\binom{k}{2}f(x_0(k-4)h)-\ldots+(-1)^k f(x_0-kh)}{(2h)^k} \tag{3}$$

zmierza do granicy, gdy $h \to 0$; granicę tę nazywamy k-tą pochodną Riemanna i oznaczamy $D_k f(x_0)$. Szczególnie znany jest wypadek $k = 2$; granica $D_2 f(x_0)$ nazywa się często *pochodną Schwarza*. Głównym wynikiem pracy [*9*] jest twierdzenie, że *jeżeli w każdym punkcie x_0 zbioru E miary dodatniej pochodna $D_k f(x_0)$ istnieje — ogólniej, jeżeli w każdym punkcie $x_0 \in E$ iloraz* (3) *pozostaje ograniczony, gdy $h \to 0$ — to w prawie każdym punkcie $x_0 \in E$ funkcja $f(x)$ ma k-tą różniczkę*, tzn. że dla $h \to 0$, $f(x_0+h)$ jest równe pewnemu wielomianowi stopnia k zmiennej h, z błędem, który jest $o(h^k)$.

Dowód twierdzenia nie jest łatwy i rozpada się na dwie części. W pierwszej dowodzi się, że jeżeli iloraz (3) jest ograniczony dla $x_0 \in E$, $h \to 0$ (ograniczoność nie musi być jednostajna), to dla prawie każdego $x_0 \in E$ mamy rozwinięcie

$$f(x_0+h) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(x_0) \frac{h^j}{j!} + O(h^k). \tag{4}$$

W drugiej części dowodu wykazuje się, że jeżeli dla każdego punktu x_0 zbioru E mamy relację (4), to istnieje funkcja $a_k(x_0)$ określona dla prawie wszystkich $x_0 \in E$ i taka że dla prawie każdego $x_0 \in E$

$$f(x_0+h) = \sum_{j=0}^{k} a_j(x_0) \frac{h^j}{j!} + o(h^k). \tag{5}$$

W pracy [9] ta druga część, która ma duże zastosowania niezależnie od ogólnego twierdzenia, udowodniona jest w sposób bardzo skomplikowany; w szczególności dowód opiera się na głębokich twierdzeniach o zachowaniu się funkcji analitycznych na brzegu obszaru istnienia. Uproszczony dowód, używający wyłącznie metod zmiennej rzeczywistej podany jest w [8], i opiera się z kolei na ciekawym i ważnym dla dalszych zastosowań następującym twierdzeniu:

Przypuśćmy, że w każdym punkcie zbioru E miary dodatniej funkcja f spełnia relację (4). *Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór doskonały $P \subset E$ różniący się w mierze od E o mniej niż ε oraz pewna funkcja $g(x)$ klasy C_k* (tzn. ciągła wraz z pochodnymi aż do rzędu k włącznie) *taka, że oznaczając przez $\varphi(x)$ odległość punktu x od zbioru P mamy wszędzie, z wyjątkiem może skończonej liczby przedziałów przyległych do P, nierówność*

$$|f(x)-g(x)| \leqslant C\{\varphi(x)\}^k,$$

gdzie C jest niezależne od x.

W szczególności $f(x) = g(x)$ na P. Przyjmując więc $f-g = h$ mamy rozkład

$$f(x) = g(x)+h(x), \tag{6}$$

gdzie $g(x)$ jest klasy C_k, a $h(x)$ jest, poza skończoną liczbą przedziałów przyległych do P, majoryzowana przez $C\{\varphi(x)\}^k$; a więc, używając twierdzenia o całce (1) w przypadku $\lambda = k$, całka

$$\int_a^b \frac{h(t)}{|x-t|^{k+1}}\,dt \tag{7}$$

jest skończona prawie wszędzie na P. Rozkład (6) i zbieżność całki (7) są źródłem ciekawych wyników.

Może należy tu jeszcze wspomnieć, że podane wyżej twierdzenie o pochodnych riemannowskich nasuwa podobne zagadnienie dla ogólniejszej definicji. Ograniczając się dla prostoty do wypadku $k = 2$ możemy określić drugą pochodną uogólnioną funkcji f jako ewentualną granicę dla $h \to 0$ ilorazu

$$\frac{af(x+\alpha h)+bf(x+\beta h)+cf(x+\gamma h)}{h^2}, \tag{8}$$

gdzie $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ są dowolnymi liczbami spełniającymi warunki:

$$a+b+c=0, \quad a\alpha+b\beta+c\gamma=0, \quad a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2=1,$$

(warunki te gwarantują, że jeżeli f ma zwykłą drugą pochodną $f''(x)$, to iloraz (8) dąży do $f''(x)$, gdy $h \to 0$). W pracy [*51*] jest pokazane, że jeżeli f ma w każdym punkcie zbioru E drugą pochodną uogólnioną w tym sensie, to druga różniczka f istnieje prawie wszędzie w E. Dla $k > 2$ zagadnienie pozostaje jednak otwarte.

Z innych wyników pracy [*9*] można tu wspomnieć o nowej definicji i własnościach tzw. całki trygonometrycznej. Przez *całkę trygonometryczną* rozumie się zazwyczaj taką definicję T całki (musi być ona ogólniejsza niż całka Lebesgue'a), że każdy szereg trygonometryczny, o którym zakładamy tylko, że jest zbieżny wszędzie, ma sumę $f(x)$ całkowalną w sensie T na $(0, 2\pi)$, na tymże przedziale są całkowalne wszystkie iloczyny $f(x)\cos kx$ i $f(x)\sin kx$ $(k = 1, 2, \ldots)$ i współczynniki szeregu wyrażają się przez klasyczne wzory Eulera-Fouriera. Istnieje kilka definicji całek T; nie są one prawdopodobnie równoważne, ale mało wiemy o tym. Najwcześniejsze i najważniejsze wyniki w tej dziedzinie należą do Denjoy. Definicja podana w [*9*] jest typu perronowskiego, to znaczy opiera się na pojęciu funkcji zwyższających i zniższających, ale pochodną bierze się tu symetryczną i w sensie Borela.

Podam teraz główny wynik pracy [*7*]. Niech $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie funkcją lokalnie całkowalną. Klasyczne twierdzenie Lebesgue'a mówi, że prawie każdy punkt $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ma następującą własność: Jeżeli I jest dowolnym przedziałem n-wymiarowym (prostopadłościanem o bokach równoległych do osi) zawierającym punkt $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, to iloraz

$$\frac{\int_I f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n}{|I|}, \tag{9}$$

gdzie $|I|$ oznacza miarę I, dąży do $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, gdy wymiary I dążą do zera *w sposób regularny*, przez co rozumiemy, że iloraz dwu dowol-

nych boków I pozostaje ograniczony. Okazuje się (p. [7]), że *jeżeli o f założymy nieco więcej niż zwykłą całkowalność, a mianowicie założymy, że funkcja $|f|(\log^+|f|)^{n-1}$ jest lokalnie całkowalna* (ma to miejsce w szczególności, gdy $f \in L^p$, $p > 1$), *to w powyższym twierdzeniu Lebesgue'a założenie regularności można opuścić.* Mówimy wtedy że całka f jest *mocno różniczkowalna* w punkcie $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Okazuje się też, że jeżeli $\chi(u)$ jest funkcją dodatnią, monotonicznie rosnącą, gdy $u \to \infty$, ale słabiej niż $(\log u)^{n-1}$, to całkowalność funkcji $|f|\chi(|f|)$ już na ogół nie wystarcza dla mocnej różniczkowalności całki funkcji f; w szczególności twierdzenie o mocnej różniczkowalności całki jest fałszywe dla funkcji $f \in L$ (udowodnił to Saks, p. [15]). Gdy $n = 1$, czynnik $(\log^+ f)^{n-1}$ można oczywiście odrzucić, i w przestrzeni jednowymiarowej nie mamy przy różniczkowaniu całek tego zjawiska, co występuje przy $n \geqslant 2$.

W pracy [*53*] omawiana jest kwestia aproksymacji całki Lebesgue'a przez sumy riemannowskie odpowiadające rozbiciu przedziału podstawowego na równe części; ten sam temat jest poruszony w [*17*].

Z drobniejszych ale ciekawych wyników wspomnę tylko o następującym uogólnieniu znanego twierdzenia Łuzina o tym, że każda funkcja mierzalna jest prawie wszędzie pochodną funkcji ciągłej. W pracy [*3*] wykazuje Marcinkiewicz istnienie funkcji ciągłej $F(x)$, którą by można nazwać *uniwersalną pierwotną*, a która ma następującą własność: *Jakąkolwiek weźmiemy funkcję mierzalną $f(x)$, można znaleźć ciąg liczb $\{h_n$ dążący do 0 i taki, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n} = f(x)$$

prawie wszędzie.

Wreszcie w pracy [*2*] autor podaje kilka twierdzeń o funkcjach $f(x)$ mających *w przedziale (a, b) skończoną p-tą wariację.* Rozumiemy przez to, że jakikolwiek weźmiemy podział $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, to sumy $\sum_j |f(x_j)-f(x_{j-1})|^p$ są ograniczone.

Szeregi trygonometryczne

Wprowadzimy dla krótkości następujące systematyczne znakowanie. Szereg trygonometryczny

$$(10) \qquad \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

oznaczać będziemy przez $\sum A_n(x)$, szereg „sprzężony"

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{11}$$

przez $\sum B_n(x)$. Sumy cząstkowe szeregów (10) i (11) oznaczać będziemy odpowiednio przez $S_n(x)$ i $\tilde{S}_n(x)$, a jeżeli (10) jest szeregiem Fouriera funkcji f, to również przez $S_n(x,f)$ i $\tilde{S}_n(x,f)$.

Powróćmy teraz do pracy [7]. Jako zastosowania wspomnianego wyżej twierdzenia o mocnej różniczkowalności całek do szeregów Fouriera

$$\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty} c_{m_1 \ldots m_n} e^{i(m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n)} \tag{12}$$

udowodniony jest następujący wynik: *Jeżeli* (12) *jest szeregiem Fouriera funkcji* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *takiej, że* $|f|(\log^+|f|)^{n-1}$ *jest całkowalne, to szereg ten jest prawie wszędzie sumowalny do* f *metodą pierwszej średniej arytmetycznej, tzn. wyrażenie*

$$\sum_{m_1=-N_1}^{N_1} \cdots \sum_{m_n=-N_n}^{N_n} \left(1 - \frac{|m_1|}{N_1+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|m_n|}{N_n+1}\right) c_{m_1 \ldots m_n} e^{i(m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n)} \tag{13}$$

zmierza prawie wszędzie do $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *gdy* $N_1, N_2, \ldots, N_n$ *dążą do* $+\infty$ *niezależnie od siebie. Przy tym samym założeniu co do* f *średnie Abela*

$$\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty} c_{m_1 \ldots m_n} e^{i(m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n)} r_1^{|m_1|} \ldots r_n^{|m_n|} \tag{14}$$

dążą prawie wszędzie do $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *gdy* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *dążą do* 1 *niezależnie od siebie.*

Oba twierdzenia są jednak fałszywe, gdy osłabimy założenie całkowalności funkcji $|f|(\log^+|f|)^{n-1}$, a w szczególności gdy założymy tylko zwykłą całkowalność funkcji f. W pracy [46] udowodnione jest jednak, że *w tym ostatnim przypadku mamy jednak prawie wszędzie sumowalność metodą pierwszej średniej arytmetycznej, jeżeli wskaźniki* $N_1, N_2, \ldots, N_n$ *dążą do* $+\infty$ *w sposób regularny*, przez co rozumiemy, że każdy z ilorazów N_j/N_k *pozostaje ograniczony*. Podobnie pozostaje słuszne twierdzenie o sumowalności Abela, jeżeli założymy, że ilorazy $(1-r_j)/(1-r_k)$ pozostają ograniczone. Twierdzenia te są odpowiednikami wspomnianego wyżej twierdzenia Lebesgue'a o regularnej różniczkowalności całek, ale dowody tu są mniej łatwe i wykorzystują inne pomysły. Por. też [22].

Powróćmy również do pracy [9]. Część jej poświęcona szeregom trygonometrycznym nawiązuje do dwóch tematów: a) twierdzenia Kutt-

nera, które było wtedy świeżo udowodnione i które mówi, że jeżeli szereg trygonometryczny $\sum A_n(x)$ jest zbieżny w zbiorze E miary dodatniej, a szereg sprzężony $\sum B_n(x)$ jest sumowalny $(C,1)$ (tzn. metodą pierwszej średniej arytmetycznej) w E, to szereg $\sum B_n(x)$ jest zbieżny prawie wszędzie w E (Ponieważ szereg Fouriera i szereg doń sprzężony są prawie wszędzie sumowalne metodą $(C,1)$, wynika stąd w szczególności, że zbiory punktów zbieżności dla obu szeregów są te same z dokładnością do zbioru miary zero.); b) twierdzenia Plessnera zakomunikowanego autorom przez prof. Kołmogorowa listownie, bez dowodu (szkic dowodu ogłosił Plessner nieco później p. [14]), a którego istotą jest, że w twierdzeniu Kuttnera warunek sumowalności $(C,1)$ szeregu $\sum B_n(x)$ można opuścić.

W pracy [9] twierdzenie Plessnera uogólnione jest jak następuje:

Przypuśćmy, że szereg trygonometryczny $\sum A_n(x)$ jest sumowalny w zbiorze E metodą (C,α), $\alpha > -1$. Wtedy szereg $\sum B_n(x)$ jest sumowalny (C,α) w prawie każdym punkcie zbioru E. Ogólniej,

Jeżeli średnie Cesàro rzędu $\alpha > -1$ szeregu $\sum A_n(x)$ (oznaczmy je przez $\sigma_n^\alpha(x)$) mają skończone oscylacje w każdym punkcie zbioru E, tzn. jeżeli funkcje

$$\sigma_*(x) = \liminf_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha(x), \qquad \sigma^*(x) = \limsup_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha(x)$$

są skończone dla $x \in E$, to w prawie każdym punkcie zbioru E:

a) *szereg sprzężony $\sum B_n(x)$ ma również skończone oscylacje metodą (C,α), tzn. funkcje*

$$\tilde{\sigma}_*(x) = \liminf_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n^\alpha(x), \qquad \tilde{\sigma}^*(x) = \limsup_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n^\alpha(x),$$

są skończone ($\tilde{\sigma}_n^\alpha$ są tu średnimi (C,α) dla szeregu $\sum B_n(x)$);

b) *szeregi $\sum A_n(x)$ i $\sum B_n(x)$ są sumowalne $(C,\alpha+\varepsilon)$ dla każdego $\varepsilon > 0$;*

c) *oznaczając uogólnione sumy szeregów $\sum A_n(x)$ i $\sum B_n(x)$ odpowiednio przez $\sigma(x)$ i $\tilde{\sigma}(x)$, mamy*

$$\sigma(x) = \tfrac{1}{2}[\sigma_*(x)+\sigma^*(x)], \qquad \tilde{\sigma}(x) = \tfrac{1}{2}[\tilde{\sigma}_*(x)+\tilde{\sigma}^*(x)],$$

$$\sigma^*(x)-\sigma_*(x) = \tilde{\sigma}^*(x)-\tilde{\sigma}_*(x).$$

Jeżeli zamiast szeregów trygonometrycznych $\sum A_n(x)$ rozważymy szeregi potęgowe na kole zbieżności, tj. szeregi postaci

$$c_0+c_1e^{i\theta}+c_2e^{2i\theta}+\ldots+c_ne^{in\theta}+\ldots, \tag{15}$$

to twierdzenia o granicach nieoznaczoności sum cząstkowych i średnich Cesàro przybierają postać geometrycznie bardziej ciekawą. Będziemy mówili, że zbiór Z punktów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ma *budowę kołową o środku w punkcie z_0*, jeżeli Z składa się z kół (w liczbie

skończonej, przeliczalnej lub nieprzeliczalnej) o wspólnym środku z_0. Oznaczmy przez $s_n(\theta)$ sumy cząstkowe szeregu (15), przez $L(\theta)$ zaś zbiór wszystkich punktów skupienia ciągu $s_0(\theta), s_1(\theta), \ldots, s_n(\theta), \ldots$; $L(\theta)$ jest, jak łatwo widzieć, zbiorem domkniętym. Jednym z głównych wyników pracy [*54*] (przygotowanej do druku przez współautora, już zdaje się po śmierci Marcinkiewicza) jest następujące twierdzenie:

Jeżeli szereg (15) *jest sumowalny metodą Abela w każdym punkcie zbioru* E *do sumy skończonej* $s(\theta)$, *to w prawie każdym punkcie* $\theta \in E$ *zbiór* $L(\theta)$ *ma budowę kołową o środku w punkcie* $s(\theta)$.

Z grubsza więc mówiąc, dla prawie każdego punktu $\theta \in E$ sumy cząstkowe $s_n(\theta)$ jak gdyby biegły tylko po pewnych orbitach; mogą przeskakiwać z jednej orbity na drugą, ale wypełniają wszystkie orbity. Gdy współczynniki c_n dążą do zera, wtedy $s_n(\theta) - s_{n-1}(\theta) \to 0$ i jeżeli $L(\theta)$ ma budowę kołową, to musi być tarczą kołową; ma to miejsce w szczególności, gdy część rzeczywista szeregu (15) jest szeregiem Fouriera.

Dobrą ilustracją twierdzenia jest tu szereg geometryczny $1+z+z^2+\ldots$, który na kole jednostkowym przyjmuje postać

$$1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+\ldots+e^{in\theta}+\ldots \tag{16}$$

W tym przypadku

$$s_n(\theta) = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}, \qquad s(\theta) = \frac{1}{1-e^{i\theta}},$$

a ze wzoru

$$|s(\theta)-s_n(\theta)| = |1-e^{i\theta}|^{-1} = |2\sin\tfrac{1}{2}\theta|^{-1}$$

widać, że dla każdego $\theta \neq 0$, $\bmod 2\pi$, sumy cząstkowe $s_n(\theta)$ znajdują się na kole o środku $1-e^{i\theta}$ i promieniu $|1-e^{i\theta}|^{-1}$. Jeżeli θ jest niewymierne (a więc w szczególności dla prawie wszystkich θ), punkty skupienia ciągu $\{s_n\}$ wypełniają cały okręg koła. Wychodząc z szeregu (16) można otrzymać przykłady, gdy budowa zbioru $L(\theta)$ jest bardziej złożona.

Wspomnę jeszcze o innym twierdzeniu pracy [*9*]; dotyczy ono tzw. funkcji sprzężonej (całki Hilberta) danej funkcji całkowalnej $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, określonej przez wzór

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{x-t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{f(t)}{x-t}\,dt. \tag{17}$$

Własności tej funkcji są ciekawe nie tylko same przez się; są one też prototypami własności, które posiadają tzw. całki mocno osobliwe w prze-

strzeni n-wymiarowej, a które mają podstawowe znaczenie dla równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego. Dowody w przestrzeni n-wymiarowej są trudniejsze, ale dla ich przeprowadzenia musimy dobrze zrozumieć, co się dzieje na linii prostej. Że dla dowolnego całkowalnego f funkcja $\tilde{f}$ istnieje prawie wszędzie, jest podstawowym twierdzeniem Priwałowa (prosty dowód istnienia funkcji $\tilde{f}(x)$ podaje Marcinkiewicz w pracy [8]). Otóż przypuśćmy, że f ma k-tą różniczkę w każdym punkcie zbioru E. Nie jest prawdziwe, że $\tilde{f}$ ma k-tą różniczkę w prawie każdym punkcie zbioru E, gdyż $\tilde{f}$ może być nieograniczone w każdym przedziale. Okazuje się jednak, że *całka nieoznaczona funkcji* $\tilde{f}$ (można wykazać, że $\tilde{f}$ jest całkowalna w każdym skończonym przedziale) *ma w prawie każdym punkcie zbioru* E *różniczkę rzędu* $k+1$.

Dowód tego twierdzenia opiera się bardzo istotnie na skończoności całki (1). Jak ważna jest ta całka w zagadnieniach funkcji zmiennej rzeczywistej, widać na przykładzie innego twierdzenia udowodnionego przez Marcinkiewicza (p. [38], [48]), a mianowicie, że jeżeli $s_n(x)$ są sumami cząstkowymi szeregu Fouriera dowolnej funkcji całkowalnej f, to prawie wszędzie mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(s_0-f)^2+(s_1-f)^2+\ldots+(s_n-f)^2}{n+1} = 0 \tag{18}$$

(jeżeli zamienimy tu kwadraty na znak wartości bezwzględnej, to otrzymamy znacznie słabsze a bardzo dobrze znane twierdzenie, że szereg Fouriera funkcji całkowalnej f jest prawie wszędzie sumowalny do f metodą $(C, 1)$). Dla f należących do dowolnej klasy L^p, $p > 1$, twierdzenie to było już dawno znane. Wielu matematyków próbowało rozciągnąć ten wynik na przypadek $p = 1$, ale bezskutecznie. Metody klasyczne teorii szeregów Fouriera, a w szczególności twierdzenie Lebesgue'a (wzmocniona forma twierdzenia, że funkcja podcałkowa jest prawie wszędzie pochodną całki nieoznaczonej) jest tu niewystarczające, jak wykazali Hardy i Littlewood w swej pracy [7]. Ten negatywny wynik skłonił ich nawet do wyrażenia przypuszczenia, że twierdzenie jest fałszywe dla $p = 1$ (p. [7], str. 187). Wynik Marcinkiewicza był więc tu niespodzianką i wyraźnie uwydatnił znaczenie całki (1) w teorii funkcji zmiennej rzeczywistej i szeregów trygonometrycznych.

Całka (2), graniczny przypadek całki (1), występuje we wczesnej i bardzo pięknej nocie [5]. Udowadnia tam autor, że *jeżeli funkcja okresowa i całkowalna* $f(x)$ *spełnia w każdym punkcie* x *zbioru* E *warunek*

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(x\pm t)-f(x)| = O\left\{\frac{1}{\log 1/h}\right\} \qquad (h \to +0), \tag{19}$$

to szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny w prawie każdym punkcie zbioru E. Nieco później, w pracy [8], udowadnia Marcinkiewicz, że wynik ten nie da się wzmocnić i że otrzymujemy twierdzenie fałszywe, gdy w prawej stronie warunku (19) zastąpimy funkcję $(\log 1/h)^{-1}$ przez jakąkolwiek inną funkcję dążącą do zera powolniej niż $(\log 1/h)^{-1}$. Pozostaje jednak otwarte zagadnienie, czy w warunku (19) możemy opuścić znak wartości bezwzględnej pod znakiem całki.

Z wyników pracy [7] należy też wspomnieć o twierdzeniu, że *istnieje funkcja całkowalna f, której szereg Fouriera jest rozbieżny prawie wszędzie, ale ciąg* $\{S_n(x,f)\}$ *jest ograniczony* (nie jednostajnie) *w prawie każdym punkcie.* Marcinkiewicz otrzymał ten wynik przez modyfikację znanej konstrukcji Kołmogorowa [8], w której ciąg $\{S_n(x,f)\}$ jest nieograniczony w prawie każdym punkcie. Niezbędna tu modyfikacja wcale nie jest oczywista. Znaczenie wyniku polega przede wszystkim na tym, że wskazuje on wyraźnie na istotną różnicę między zachowaniem się sum cząstkowych szeregu Fouriera a zachowaniem się ilorazu różnicowego funkcji. Znane bowiem twierdzenie Denjoy mówi, że jeżeli iloraz $\{F(x+h)-F(x)\}/h$ pozostaje ograniczony (niekoniecznie jednostajnie), gdy x należy do zbioru E miary dodatniej a $h \to 0$, to iloraz ten posiada granicę prawie wszędzie w E. Nasuwa się tu też naturalne pytanie, czy metoda nie da funkcji f, dla której ciąg $\{S_n(x,f)\}$ byłby rozbieżny w *każdym* punkcie i w *każdym* punkcie ograniczony, gdyż w tym przypadku, ze względu na klasyczne twierdzenie Baire'a sumy $\{S_n(x,f)\}$ musiałyby być jednostajnie ograniczone w jakimś przedziale, f byłaby ograniczona w tym przedziale, a stąd już łatwo otrzymalibyśmy funkcję *wszędzie* ograniczoną, o sumach cząstkowych *wszędzie* ograniczonych (nawet jednostajnie), a jednak *wszędzie* rozbieżnych. Czy taka funkcja istnieje, niewiadomo, ale jeżeli istnieje, to nie można skonstruować jej metodą Kołmogorowa, gdyż funkcja otrzymana tą metodą może mieć ciąg $\{S_{n_k}(x,f)\}$ rozbieżny dla dowolnego przepisanego ciągu wskaźników n_k, podczas gdy wiadomo, że dla funkcji ograniczonych np. ciąg $\{S_{2^n}(x,f)\}$ musi być zbieżny prawie wszędzie.

Omawiając życiorys Marcinkiewicza wspomniałem o pracy powstałej w związku z zagadnieniem postawionym przez Schaudera. Główne wyniki tej pracy [40] są dwa. Przypuśćmy, że mamy szereg Fouriera dowolnej funkcji f klasy L^p, gdzie $p > 1$. Jakie warunki musi spełniać ciąg liczbowy $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$, by szereg $\sum \mu_n A_n(x)$ był również szeregiem Fouriera funkcji tej samej klasy L^p? W przypadku $p = 1$ warunek konieczny i wystarczający jest znany: szereg $\sum \mu_n (\sin nx)/n$ musi być szeregiem Fouriera funkcji o wahaniu skończonym. Dla $p > 1$ zagadnienie to jest jednak znacznie trudniejsze i dotychczas nie rozwiązane. Marcinkiewicz podaje warunek wystarczający, który dotychczas jest najlepszy: *Jeżeli*

ciąg $\{\mu_n\}$ *jest ograniczony i sumy*

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |\mu_k - \mu_{k+1}| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{20}$$

są też ograniczone, to ilekroć $\sum A_n(x)$ *jest szeregiem Fouriera funkcji klasy* L^p, $p > 1$, *to to samo zachodzi dla szeregu* $\sum \mu_n A_n(x)$. Ważniejszym jednak dla zastosowań jest odpowiednik tego twierdzenia dla szeregów wielokrotnych. Twierdzenie to jest zbyt długie, aby go tu podawać (odpowiednik warunku (20) zawiera różnicę wyższych rzędów) ale ma, jak się dopiero teraz okazuje, ważne konsekwencje. Rozszerzenie twierdzenia na całki Fouriera rozważane jest w niedawnej pracy [12]. Następujące twierdzenie jest zawarte w ogólnym wyniku Marcinkiewicza i jest odpowiedzią na pytanie postawione przez Schaudera: Jeżeli (12) jest szeregiem Fouriera funkcji klasy L^p, $p > 1$, to to samo można powiedzieć o szeregu

$$\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty} \mu_{m_1,\ldots,m_n} e_{m_1,\ldots,m_n} c^{i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)},$$

gdzie $\mu_{m_1\ldots m_n}$ jest jednym z wyrażeń

$$\frac{m_j}{(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_n^2)^{1/2}}, \qquad \frac{m_j m_l}{(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_n^2)} \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Praca [*18*] zawiera dwa niezależne wyniki: a) *Jeżeli* E *jest zbiorem jednoznaczności dla szeregów trygonometrycznych* (tzn. jeżeli E ma tę własność, że każdy szereg $\sum A_n(x)$ zbieżny do zera wszędzie prócz może zbioru E musi mieć wszystkie współczynniki równe zeru), *to każdy zbiór homotetyczny z* E *jest też zbiorem jednoznaczności.* b) *Istnieje metoda liniowa* M *sumowania szeregów, spełniająca znane warunki Toeplitza, oraz szereg trygonometryczny o współczynnikach dążących do zera, wszędzie sumowalny metodą* M *do zera, ale nie tożsamościowo równy zeru.*

W pracy [*43*] Marcinkiewicz rozważa sumowalność metodą $(C, 1)$ sum cząstkowych *kwadratowych* szeregów podwójnych Fouriera $\sum c_{st} e^{i(sx+ty)}$, tj. granicę dla $n \to \infty$ średnich

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_{k,k}(x, y), \qquad \text{gdzie} \qquad s_{k,k}(x, y) = \sum_{|s|,|t| \leqslant k} c_{st} e^{i(sx+ty)}.$$

Dowody używają dość subtelnych oszacowań i jest prawdopodobne, że pomysły tej pracy nie są całkowicie wyczerpane i mogą być użyte dla otrzymania dalszych wyników.

Z drobniejszych wyników wspomnę o króciutkiej nocie [*1*], pierwszej drukowanej pracy Marcinkiewicza, gdzie podany jest bardzo prosty dowód twierdzenia Kołmogorowa o tym, że jeżeli $f \in L^2$, wskaźniki $\{n_k\}$ zaś wzrastają przynajmniej tak szybko jak postęp geometryczny (dokładniej, jeżeli $n_{k+1}/n_k > q > 1$), to ciąg $\{S_{n_k}(x,f)\}$ jest zbieżny prawie wszędzie (klasyczne zagadnienie, czy ciąg *wszystkich* sum cząstkowych $S_n(x,f)$ jest zbieżny prawie wszędzie, jest dotychczas nierozwiązane). W nocie [*50*] podane jest nowe kryterium zbieżności prawie wszędzie dla szeregów Fouriera funkcji klasy L^p, $1 \leqslant p < 2$. Wreszcie w pracy [*6*] rozważane jest zagadnienie możliwej inkluzji między dwiema metodami sumowalności Riemanna; jedna z tych metod definiuje sumę *szeregu* $\sum u_n$ jako ewentualną granicę wyrażenia

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$$

dla $h \to 0$, druga definiuje granicę *ciągu* $\{s_n\}$ jako ewentualną granicę wyrażenia

$$\frac{2h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$$

dla $h \to +0$. Marcinkiewicz udowadnia, że *te dwie metody są nieporównywalne*. Do wyników tych nawiązuje praca [10].

Interpolacja trygonometryczna

Zanim przejdę do omówienia wyników Marcinkiewicza w teorii interpolacji, przypomnę pewne podstawowe fakty i określenia. Niech będą dane $2n+1$ punktów $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ na osi rzeczywistej, różne mod 2π, oraz $2n+1$ dowolnych liczb rzeczywistych $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$. Istnieje wtedy wielomian trygonometryczny

$$T(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{21}$$

rzędu n (ma więc $2n+1$ współczynników), taki że

$$T(x_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n)$$

i przy tym wielomian ten jest jedyny. Najciekawszy dla zastosowań jest przypadek, gdy punkty $e^{ix_0}, e^{ix_1}, \ldots, e^{ix_{2n}}$ są *równo rozłożone* na kole jednostkowym, to znaczy gdy, powiedzmy,

$$x_k = x_0 + \frac{2\pi k}{2n+1}, \tag{22}$$

a wartości $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ są odpowiednio wartościami funkcji ciągłej $f(x)$ w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$. Wielomian $T(x) = T_n(x, f)$ nazywa się wtedy *wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a* dla funkcji f; zależy on również od x_0, ale dla prostoty możemy sobie ustalić x_0, przyjmując raz na zawsze $x_0 = 0$. Wielomiany T są, jak to łatwo udowodnić, dane przez wzory

$$T_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}\,d\omega_{2n+1}(t), \tag{23}$$

gdzie $\omega_{2n+1}(t)$ jest funkcją schodkową mającą skoki $2\pi/(2n+1)$ w punktach x_k, a poza tym ciągła. Gdy zastąpimy tu $d\omega_{2n+1}(t)$ przez dt, otrzymamy klasyczny wzór na n-tą sumę cząstkową $S_n(x,f)$ szeregu Fouriera funkcji f, a ponieważ gdy $n \to \infty$ wykres $\omega_{2n+1}(t)$ zbliża się, po odjęciu stałej, do granicy t, nasuwa się przypuszczenie, że zachowanie się ciągu $\{T_n\}$ przy $n \to \infty$ jest podobne do zachowania się ciągu $\{S_n\}$.

Tak jest istotnie w pewnym stopniu; ale że tak nie jest całkowicie, było wiadome już dość dawno. Tak np. jeszcze Faber wykazał istnienie funkcji ciągłych f takich, że ciąg $\{S_n(x,f)\}$ jest zbieżny jednostajnie, podczas gdy ciąg $\{T_n(x,f)\}$ jest rozbieżny w pewnych indywidualnych punktach, albo też jest zbieżny wszędzie, ale nie jednostajnie w każdym przedziale. W swej pracy magisterskiej napisanej w 1933 roku, a później przedstawionej jako praca doktorska, Marcinkiewicz idzie znacznie dalej w tym kierunku, budując funkcję ciągłą f taką, że ciąg $\{S_n(x,f)\}$ *jest zbieżny jednostajnie, podczas gdy ciąg* $\{T_n(x,f)\}$ *jest rozbieżny prawie wszędzie.*

Praca doktorska Marcinkiewicza ukazała się w druku w 1935 r. (p. [*4*]), i w tym samym czasie ukazała się praca matematyka węgierskiego Grünwalda (p. [5]) zawierająca podobny wynik dla tzw. interpolacji czebyszewowskiej, która tylko formalnie różni się od interpolacji Lagrange'a. Ciekawe jest, że w rok później obaj autorowie mogli wzmocnić, niezależnie od siebie, swe przykłady, konstruując funkcje f ciągłe takie, że ich wielomiany interpolacyjne czebyszewowskie są rozbieżne wszędzie; p. [*14*], [6].

Należy zauważyć, że zagadnienie, czy istnieje funkcja ciągła f taka, że jej szereg Fouriera jest rozbieżny wszędzie, czy choćby prawie wszędzie, jest dotychczas otwarte i wydaje się bardzo trudne. Już to samo wskazuje na istotną różnicę między bardziej subtelnymi własnościami wielomianów $S_n(x,f)$ i $T_n(x,f)$. Różnica ta uwydatnia się jeszcze bardziej, gdy rozważymy następujące wyniki pracy magisterskiej Marcinkiewicza.

a) *Funkcja ciągła f, dla której ciąg $\{T_n(x,f)\}$ jest rozbieżny prawie*

wszędzie (a nawet wszędzie), *może spełniać warunek*

$$f(x+h)-f(x) = O\left\{\left(\log\frac{1}{h}\right)^{-1}\right\}. \tag{24}$$

Jest klasyczne twierdzenie, że jeżeli zastąpimy tu O przez o, to ciąg $\{T_n(x,f)\}$ jest zbieżny jednostajnie. W teorii interpolacji natrafiamy więc na bardzo wyraźną granicę, wyrażoną w terminach modułu ciągłości funkcji, między zbieżnością i rozbieżnością. Z drugiej strony, dla szeregów Fouriera warunek (24) gwarantuje zbieżność prawie wszędzie; wystarcza nawet słabszy warunek

$$f(x+h)-f(x) = O\left\{\left(\log\frac{1}{h}\right)^{-\alpha}\right\}, \qquad \alpha > \tfrac{1}{2}.$$

b) *Dla dowolnego ciągu* $\{\varepsilon_n\}$ *malejącego do zera istnieje taka funkcja ciągła* f, *że w prawie każdym punkcie* x *mamy*

$$T_n(x,f) \neq O(\varepsilon_n \log n). \tag{25}$$

Z drugiej strony podstawowy wynik Kołmogorowa-Seliwerstowa-Plessnera mówi, że $S_n(x,f) = o\{(\log n)^{1/2}\}$ prawie wszędzie dla dowolnego ciągłego f.

Tytuł pracy doktorskiej Marcinkiewicza jest: *Wielomiany interpolacyjne funkcji bezwzględnie ciągłych*. Autor bowiem rozważał tam również następujący temat. Niech będzie dana funkcja f okresowa i całkowalna w sensie Lebesgue'a, i niech $F(x)$ będzie całką nieoznaczoną f; przypuszczamy dla prostoty, że $F(x)$ jest funkcją okresową, co zawsze można osiągnąć odejmując od f stałą. Rozważmy pochodną $T_n'(x,F)$ wielomianu interpolacyjnego $T_n(x,F)$. Nasuwa się przypuszczenie, że gdy $n\to\infty$, pochodna ta może w jakiś sposób dążyć do f. Że tak jest istotnie, jest jednym z wyników pracy, i okazuje się, że wielomiany $T_n'(x,F)$ znacznie lepiej naśladują zachowanie się $S_n(x,f)$ niż wielomiany $T_n(x,f)$; por. też [*33*]. Do tematu tego nawiązywali później i inni; por. [11].

Część tezy doktorskiej Marcinkiewicza ukazała się później po francusku w pracach [*11*] i [*12*]. Te ostatnie zawierają jednak i szereg innych ciekawych wyników, z których wspomnimy następujący. Niech $T(x)$ będzie dowolnym wielomianem trygonometrycznym rzędu n, zaś $1 < p < \infty$. Wtedy

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |T(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant A_p\left\{\int_0^{2\pi} |T(x)|^p\,d\omega_{2n+1}(x)\right\}^{1/p}, \tag{26}$$

to znaczy, że średnia rzędu p wielomianu T na przedziale $(0,2\pi)$ jest

zmajoryzowana przez wielokrotność średniej rzędu p w $2n+1$ równo odległych punktach. Stała A_p zależy tu tylko od p, ale nie od f. Nierówność jest fałszywa dla $p = 1$ i $p = \infty$. Natomiast nierówność przeciwna

$$\left\{\int_0^{2\pi} |T(x)|^p \, d\omega_{2n+1}(x)\right\}^{1/p} \leqslant A \left\{\int_0^{2\pi} |T(x)|^p \, dx\right\}^{1/p}, \tag{27}$$

gdzie A jest stałą absolutną, zachodzi dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Dalsze podobne wyniki znajdujemy w pracy [17].

Na zakończenie wspomnę jeszcze o dwóch twierdzeniach z teorii interpolacji. W pracy [11] pokazane jest, że a) *Istnieje funkcja ciągła f taka, że średnie arytmetyczne*

$$\frac{T_0(x,f)+T_1(x,f)+\ldots+T_n(x,f)}{n+1} \tag{28}$$

są rozbieżne w pewnych punktach; inaczej mówiąc, nie mamy tu odpowiednika klasycznego twierdzenia Fejéra o średnich arytmetycznych sum cząstkowych szeregów Fouriera. Odpowiednik taki da się jednak otrzymać rozważając średnie arytmetyczne sum cząstkowych dla *każdego poszczególnego* $T_n(x,f)$; por. [11]. b) *Jeżeli wielomiany interpolacyjne Czebyszewa funkcji f są zbieżne w jakimś punkcie x_0, to granica musi być $f(x_0)$*. Wynik ten jest ciekawy i z tego powodu, że ze względu na negatywny wynik a) nie możemy tu (inaczej niż w teorii szeregów Fouriera) używać przy dowodzie średnich (28).

Operacje funkcyjne

Najważniejszą pracą Marcinkiewicza jest tu [44]. Jest to zdaje się ostatnia praca złożona do druku przez Marcinkiewicza; ukazała się latem 1939 r. w Comptes Rendus paryskiej Akademii. Nie zawiera wcale dowodów. Dowód głównego twierdzenia zakomunikował mi Marcinkiewicz listownie; kompletny dowód twierdzenia Marcinkiewicza można znaleźć w pracy [23]. Twierdzenie to jest bardzo ważne, ale by go zrozumieć, należy przypomnieć tzw. twierdzenie Riesza-Thorina o interpolacji operacji liniowych.

Przypuśćmy, że mamy operację addytywną

$$g = Tf,$$

gdzie f i g są określone odpowiednio w przestrzeniach euklidesowych R_1 i R_2. Normy w tych przestrzeniach są określone przy pomocy miar μ_1 i μ_2 przez wzory

$$\|f\|_{r,\mu_1} = \Big(\int_{R_1} |f|^r \, d\mu_1\Big)^{1/r}, \qquad \|g\|_{r,\mu_2} = \Big(\int_{R_2} |g|^r \, d\mu_2\Big)^{1/r}, \qquad (1 \leqslant r < \infty). \tag{29}$$

Mówimy, że *operacja T jest typu (p, q)*, jeżeli istnieje taka stała M, że

$$\|g\|_{q,\mu_2} \leqslant M\|f\|_{p,\mu_1}. \tag{30}$$

Najmniejszą wartość stałej M będziemy nazywać *normą* (p, q) operacji. Twierdzenie Riesza-Thorina mówi, że jeżeli T jest jednocześnie typu (p_1, q_1) z normą M_1 i typu (p_2, q_2) z normą M_2, to jest również typu (p, q) dla dowolnego (p, q) takiego, że punkt A o współrzędnych prostokątnych $(1/p, 1/q)$ leży na odcinku łączącym punkty $A_1(1/p_1, 1/q_1)$ oraz $A_2(1/p_2, 1/q_2)$, i norma M dla (p, q) spełnia nierówność

$$M \leqslant M_1^{1-t} M_2^t, \tag{31}$$

gdzie t jest określone przez jedną z równości

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2} \quad (0 < t < 1). \tag{32}$$

Twierdzenie to ma podstawowe znaczenie i daje nie tylko szereg pięknych wyników, ale ogólny i sugestywny punkt widzenia. Nie zawsze go jednak można stosować, gdyż jakkolwiek operacja T może być typu (p, q) dla każdego punktu wewnętrznego odcinka A_1A_2, nie musi być tego typu w punktach A_1 i A_2, a więc twierdzenie Riesza-Thorina nie da się wtedy zastosować. Marcinkiewicz zauważył, że skończoność norm M_1 i M_2 można tu zastąpić przez założenie słabsze (podsunięte prawdopodobnie przez dawny wynik Kołmogorowa [9] o własnościach funkcji sprzężonych z teorii szeregów Fouriera). Zauważmy mianowicie, że jeżeli oznaczymy przez $E(y, g)$ zbiór tych punktów przestrzeni R_2, gdzie $|g| \geqslant y \geqslant 0$, to oznaczając normę $\|g\|_{r,\mu_2}$ przez M otrzymamy z drugiej równości (29) oszacowanie

$$\mu_2\{E(y, g)\} \leqslant \left(\frac{M}{y}\right)^r. \tag{33}$$

Wobec tego, w związku z (30), będziemy mówili, że operacja T jest *słabego typu* (p, q), jeżeli dla każdej funkcji f o skończonej normie $\|f\|_{p,\mu_1}$ funkcja $g = Tf$ jest określona prawie wszędzie (ze względu na miarę μ_2) w R_2 i przy pewnym M mamy nierówność

$$\mu_2\{E(y, g)\} \leqslant \left\{\frac{M\|f\|_{p,\mu_1}}{y}\right\}^q. \tag{34}$$

Najmniejszą wartość M możemy tu nazywać *słabą normą* (p, q). Operacje typu (p, q) jest czasem wygodnie nazywać, dla emfazy, operacjami *mocnego typu* (p, q). Każda operacja mocnego typu (p, q) jest jednocześnie

operacją słabego typu (p, q), ale nie odwrotnie; tak np. operacja $\tilde{f} = Tf$, gdzie $\tilde{f}$ jest podane przez wzór (17), jest słabego typu $(1, 1)$ jakkolwiek nie jest mocnego typu $(1, 1)$.

Główny wynik pracy [44] jest, że, z pewnymi zastrzeżeniami, *twierdzenie Riesza-Thorina pozostaje słuszne, jeżeli dla krańców* $(1/p_1, 1/q_1)$ *oraz* $(1/p_2, 1/q_2)$ *zastąpimy wymaganie mocnego typu przez słaby typ; konkluzja co do mocnego typu w punkcie* $(1/p, 1/q)$ *pozostaje niezmieniona.*

Poprawki, które należy tu wprowadzić, są dwie. Pierwsza, że w konkluzji twierdzenia mamy zamiast (31) nierówność

$$M \leqslant K M_1^{1-t} M_2^t, \tag{35}$$

gdzie stała K zależy od p, q, t i na ogół dąży do ∞, gdy $t \to 0$ lub $t \to 1$, nawet gdy T jest (przypadkowo) mocnego typu (p_1, q_1) i (p_2, q_2). Podczas gdy wprowadzenie stałej K jest nieszkodliwe dla zastosowań, fakt jej nieograniczoności dla $t \to 0, 1$, gdy ze względu na twierdzenie Riesza-Thorina wiemy, że powinna być ograniczona, jest niewygodny. Niedawno Cotlar i Bruschi (w pracy [4]; por. też [16]) wykazali jednak, rozwijając pomysł Marcinkiewicza, że stała K jest ograniczona, gdy $t \to 0$ i gdy T jest mocnego typu w punkcie A_1; analogicznie dla punktu A_2. Druga poprawka: gdy w twierdzeniu Riesza-Thorina zakładamy, że p i q są dowolnymi liczbami między 1 i ∞, Marcinkiewicz zakłada dodatkowo, że $q \geqslant p$. Założenie to jest mało szkodliwe, gdyż nie ma ciekawych operacji typu (p, q) przy $q < p$. Ponadto Cotlar (wynik jeszcze nie ogłoszony) potrafił usunąć i to ograniczenie.

A teraz o stosowalności twierdzenia Marcinkiewicza. Wydaje się, że słaby typ (p, q) występujący w przypadku $p = q = 1$ w pracy Kołmogorowa [9], a *explicite* w wypadku ogólnym u Marcinkiewicza, jest bardzo ważnym pojęciem, którego znaczenie jest dotychczas niedocenione. Narzuca się ono w sposób naturalny w teorii funkcji sprzężonych i ich odpowiedników n-wymiarowych, w teorii całkowania rzędu ułamkowego, w teorii współczynników Fouriera. Poza tym, gdy dowód twierdzenia Riesza-Thorina opiera się na teorii funkcji analitycznych, Marcinkiewicz używa w swym dowodzie bardzo elementarnych pojęć z teorii funkcji zmiennej rzeczywistej. W konsekwencji, gdy w twierdzeniu Riesza-Thorina musimy się ograniczyć do interpolacji w przestrzeniach L^p, dowód Marcinkiewicza pozwala na interpolację w przestrzeniach Orlicza, co ma znaczenie dla zastosowań. Poza tym, zamiast addytywności operacji T możemy założyć słabszy warunek: $|T(f_1+f_2)| \leqslant k(|Tf_1|+|Tf_2|)$.

Operacjom liniowym poświęcona jest też wcześniejsza praca [24]. Jej głównym wynikiem jest, że *jeżeli mamy ciąg operacji liniowych* T_ν,

$\nu = 1, 2, \ldots$, zupełnie ciągłych i mających mocne normy typu (p, q) ograniczone, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, to można znaleźć ciąg wskaźników $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ takich, że średnie

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} T_{n_k} f \tag{36}$$

są zbieżne prawie wszędzie dla każdej funkcji $f \in L^p$. Praca zawiera również zastosowania do układów ortogonalnych funkcji.

Wspomnę wreszcie o krótkiej pracy [*45*], która trochę już wkracza w rachunek prawdopodobieństwa. Niech $0 < s \leqslant 2$. Rozważmy jakąś liniową podprzestrzeń P przestrzeni L^p, przy czym $0 < p < s$. *Niech $g = Tf$ będzie operacją liniową typu (p, p) określoną w P, przy czym za miarę przyjmujemy zwykłą miarę Lebesgue'a. Przypuśćmy, że dla wszystkich $f \in P$ mamy $\|g\|_p \leqslant M\|f\|_p$. Oznaczmy dla skończonego ciągu $\{f_n\}$,*

$$F = \Big(\sum_n |f_n|^s\Big)^{1/s}, \qquad G = \Big(\sum_n |g_n|^s\Big)^{1/s}, \qquad g_n = Tf_n.$$

Wtedy

$$\|G\|_p \leqslant M\|F\|_p, \tag{37}$$

z tym samym M co wyżej. Jeżeli $s = 2$, to warunek $p < s$ może być odrzucony i twierdzenie jest prawdziwe dla każdego skończonego p.

Dowód jest bardzo krótki, ale opiera się na własnościach tzw. praw wyjątkowych Lévy'ego. Dla $s = 2$ wystarczy tu stosować gaussowski rozkład prawdopodobieństwa; w tym szczególnym przypadku istnieje też i prosty dowód geometryczny (por. [25_{II}, str. 224]), który niestety nie da się rozciągnąć na przypadek $s < 2$.

Układy ortogonalne

Rozważmy układ ortogonalny i normalny $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x)\ldots$, powiedzmy rzeczywisty, na odcinku $(0, 1)$. Zatem całka

$$\int_0^1 \varphi_\mu(x)\varphi_\nu(x)\,dx$$

jest równa zeru przy $\mu \neq \nu$ i jedności — gdy $\mu = \nu$. Szeregi ortogonalne

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \tag{38}$$

można rozważać bądź w klasie funkcji $f \in L^2$, bądź w dowolnej klasie L^r, $r \neq 2$. Pierwsze podejście jest bardziej naturalne, gdyż, jak to wynika

z samej definicji, układy ortogonalne specjalnie „pasują" do funkcji kwadratowo całkowalnych. Uwaga ta dotyczy jednak tylko ogólnych układów ortogonalnych, gdyż w klasycznych przykładach (układ trygonometryczny, wielomiany Legendre'a, funkcje Bessela etc.) rozważanie klas L^r prowadzi do ciekawych wyników. W ogólnym wypadku sytuacja komplikuje się również przez fakt, że podczas gdy definicja układu ortogonalnego nie porządkuje funkcji w układzie, należy z góry oczekiwać, że zachowanie się szeregu (38) zależy w sposób istotny od porządku wyrazów.

W pracy [*10*] udowadnia Marcinkiewicz ciekawe twierdzenie, że *dla każdego uporządkowanego układu ortogonalnego* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ *znaleźć można ciąg wskaźników* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *taki, że ilekroć suma* $\sum c_n^2$ *jest skończona, to sumy cząstkowe rzędu* n_k *dla szeregu* $\sum c_n \varphi_n$ *są zbieżne prawie wszędzie.* Twierdzenie to było znane dla układu trygonometrycznego, gdzie można wziąć np. $n_k = 2^k$ (jest to twierdzenie Kołmogorowa cytowane wyżej); twierdzenie ogólne otrzymuje Marcinkiewicz przez aproksymację funkcji φ_n przez szeregi trygonometryczne. Twierdzenie to nie jest prawdziwe, gdy rozważamy klasy L^r, $r \neq 2$. Tak np. szereg $\sum n^{-1/6} \cos nx$, który jest szeregiem Fouriera funkcji klasy L^r, $r < 6/5$, można, jak pokazuje Marcinkiewicz, tak przeporządkować, że w nowym szeregu każdy podciąg sum cząstkowych jest rozbieżny prawie wszędzie. Przykład ten ilustruje dobrze fakt, że w teorii rozwinięć ortogonalnych funkcji klas L^r, $r \neq 2$, napotykamy na ogół na wyniki negatywne, chyba że zrobimy bardzo mocne założenia co do układu ortogonalnego.

Rozważmy szereg trygonometryczny

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{39}$$

Szereg taki nazywa się *lakunarnym*, jeżeli ma wszystkie współczynniki równe zeru z wyjątkiem miejsc n_k, gdzie n_k rośnie tak szybko, że $n_{k+1}/n_k > q > 1$. Szereg (39) możemy oczywiście napisać jako $\sum A_{n_k}(x)$. Szeregi lakunarne mają bardzo wyraźnie zarysowane własności, naśladujące w dużym stopniu własności szeregów zmiennych przypadkowych niezależnych w rachunku prawdopodobieństwa. Np. jeżeli taki szereg jest szeregiem Fouriera funkcji ograniczonej, a choćby tylko jednostronnie ograniczonej, to musi być bezwzględnie zbieżny; jeżeli jest zbieżny, lub choćby tylko sumowalny jakąkolwiek metodą liniową w zbiorze miary dodatniej, to musi być klasy L^2 (tzn. jest szeregiem Fouriera funkcji klasy L^2); jeżeli jest klasy L^2, to jest klasy L^r, jakiekolwiek weźmiemy r, przy czym suma jego f spełnia nierówności

$$A_r \left\{ \sum (a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2) \right\}^{1/2} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^r \, dx \right)^{1/r} \leqslant B_r \left\{ \sum (a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2) \right\}^{1/2}, \tag{40}$$

gdzie stałe A_r i B_r zależą tylko od r i q. Główne wyniki prac [20] i [29] to wykazanie, że w każdym układzie ortogonalnym $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (na który w konkretnych twierdzeniach musimy nałożyć dodatkowe ograniczenia), można znaleźć podciąg $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots$, który posiada własności analogiczne do podciągu lakunarnego w układzie trygonometrycznym. Np. szereg $\sum c_k \varphi_{n_k}$ będzie zbieżny prawie wszędzie wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum c_k^2 < \infty$; jeżeli szereg $\sum c_k \varphi_{n_k}$ jest klasy L^2, to jest również klasy L^r dla każdego skończonego r; mamy nierówności analogiczne do (40) etc. Nie podaję wszystkich twierdzeń ani też bardziej precyzyjnego ich sformułowania, gdyż zależy mi raczej na uwydatnieniu typu zagadnienia niż na konkretnych wynikach. Praca [20] zawiera jednak poza tym ciekawe uwagi o tzw. układzie ortogonalnym Haara.

W pracy [15] mamy rozszerzenie twierdzeń Hausdorffa-Younga, Paley'a i innych z przypadku, gdy układ ortogonalny $\{\varphi_n\}$ jest jednostajnie ograniczony, na przypadek, gdy tylko poszczególne funkcje układu są ograniczone, albo, ogólniej, mają tylko całki

$$\int_0^1 |\varphi_n|^r dx$$

skończone dla pewnego $r > 2$.

Funkcje zmiennej zespolonej

Do tej dziedziny należą omówione już wyżej twierdzenia o zachowaniu się sum cząstkowych szeregów postaci (15).

Główny wynik pracy [31] jest następujący.

Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w kole $|z| < 1$, i przypuśćmy, że w każdym punkcie zbioru E miary dodatniej położonego na okręgu $|z| = 1$ funkcja $f(z)$ ma granicę skończoną po drogach nie stycznych do koła. Wówczas w prawie każdym punkcie $\theta \in E$, jeżeli $\Delta(\theta)$ jest dowolnym trójkątem o wierzchołku $e^{i\theta}$ a poza tym zawartym całkowicie wewnątrz koła $|z| < 1$, całka powierzchniowa

$$\iint_{\Delta(\theta)} |f'(z)|^2 dx dy \qquad (z = x + iy) \tag{41}$$

jest skończona.

W kilka lat później Spencer [16], udowodnił twierdzenie odwrotne: skończoność całki (41) w każdym punkcie zbioru E, przy czym trójkąt $\Delta(\theta)$ może się zmieniać wraz z θ, pociąga za sobą istnienie granicy funkcji $f(z)$ po drogach nie stycznych w prawie każdym punkcie zbioru E. Zespół tych dwu twierdzeń ma ważne znaczenie dla badania zachowania

się funkcji analitycznych na brzegu obszaru istnienia, ale nie możemy tu wchodzić w dalsze szczegóły.

W pracy [*42*] (identycznej z [*55*]) badane jest zachowanie się funkcji analitycznej $f(z_1, z_2)$ dwu zmiennych zespolonych w dość ogólnych obszarach. Idzie tu o rozciągnięcie na wypadek dwu zmiennych i dowolne obszary znanych twierdzeń F. Riesza, oraz Hardy'ego i Littlewooda o tzw. klasach H_p funkcji analitycznych jednej zmiennej określonych w kole jednostkowym.

W pracy [*34*] rozważane jest zagadnienie, kiedy ze zbieżności *podciągu* wszystkich sum cząstkowych szeregu potęgowego

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

w jakimś zbiorze wynika, że szereg ten ma promień zbieżności dodatni.

Temat pracy [*32*] jest na pograniczu zmiennej rzeczywistej i zespolonej. W pracach Littlewooda i Paley'a, przy rozważaniu zachowania się brzegowego funkcji $f(z)$ analitycznej w kole $|z| < 1$, wprowadzona jest funkcja zmiennej rzeczywistej

$$g(\theta) = \left(\int_0^1 (1-\varrho) |f'(\varrho e^{i\theta})|^2 d\varrho \right)^{1/2}, \tag{42}$$

która odgrywa ważną rolę. Marcinkiewicz, jak i inni przed nim, rozważa zagadnienie znalezienia odpowiednika funkcji g *bez używania zmiennej zespolonej*. Na pierwszy rzut oką mogłoby się wydawać, że gdy h jest dowolną funkcją okresową i klasy L^2, odpowiednikiem takim mogłoby być np. wyrażenie

$$\left(\int_0^\pi \frac{[h(x+t) - h(x-t)]^2}{t} dt \right)^{1/2}, \tag{43}$$

ale już bardzo proste przykłady funkcji ciągłych h wykazują, że całka taka może być rozbieżna wszędzie. Marcinkiewicz miał trafny pomysł rozważać zamiast (43) wyrażenie

$$\left(\int_0^\pi \frac{[H(x+t) + H(x-t) - 2H(x)]^2}{t^3} dt \right)^{1/2}, \tag{44}$$

gdzie $H(x)$ jest całką nieoznaczoną dla $h(x)$, i udowodnił następujące twierdzenie ogólne:

Niech $H(x)$ będzie dowolną funkcją o okresie 2π, klasy L^2. Jeżeli $H(x)$ jest różniczkowalne w każdym punkcie zbioru E, to całka (43) *jest skończona w prawie każdym punkcie zbioru E.*

Pewne zagadnienia postawione w pracy [*32*] są rozwiązane w [21]; uogólnienia na przestrzeń n-wymiarową można znaleźć w [18].

Rachunek prawdopodobieństwa

Rozpoczniemy od najwcześniejszych prac [*16*] i [*25*]. Niech $x_1, x_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych niezależnych o nadziejach matematycznych równych zeru. Możemy zmienne te interpretować jako funkcje niezależne $x_1(t), x_2(t), \ldots$ określone na odcinku $0 \leqslant t \leqslant 1$ i spełniające warunek

$$\int_0^1 x_n(t)\,dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{45}$$

Rozważmy sumy cząstkowe $s_n(t)$ szeregu

$$x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t) + \ldots \tag{46}$$

oraz funkcję

$$s^*(t) = \sup |s_n(t)|, \tag{47}$$

która, poczynając zwłaszcza od prac Chinczyna i Kołmogorowa, odgrywa w rachunku prawdopodobieństwa dużą rolę. Głównym pomysłem pracy [*16*] jest wykorzystanie do oceny funkcji $s^*(t)$ twierdzenia Hardy'ego i Littlewooda (por. 25_I, str. 29 sqq.), która mówi, że jeżeli $f(t)$ jest dowolną funkcją nieujemną klasy L^p na odcinku $(0, 1)$, zaś

$$f^*(x) = \sup_h \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

to $f^* \in L^p$ i

$$\|f^*\|_p \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f\|_p \qquad (1 < p \leqslant \infty). \tag{48}$$

Twierdzenie to zastosowane do funkcji $s(t) = \lim s_n(t)$ i $s^*(t)$ daje

$$\|s^*\|_p \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|s\|_p \qquad (1 < p \leqslant \infty). \tag{49}$$

Czynnik $p/(p-1)$ po prawej stronie jest nieskończony dla $p = 1$, ale w pracy [*25*] jest wykazane, że twierdzenie da się uratować i dla $p = 1$; dokładniej, mamy

$$\|s^*\|_p \leqslant A\|s\|_p \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty), \tag{50}$$

gdzie A jest stałą absolutną.

Z innych wyników pracy [16] można wspomnieć o warunku wystarczającym na zbieżność prawie wszędzie szeregu $\sum x_n(t)$, gdzie funkcje niezależne $x_n(t)$ mają tę samą dystrybuantę oraz skończony absolutny p-ty moment dla jakiegoś $0 < p < 2$.

Podamy jeszcze następujące twierdzenia zawarte w pracy [25].

a) *Jeżeli $\{x_n(t)\}$ jest ciągiem funkcji niezależnych o wartościach średnich równych zeru, to istnieją stałe A_p i B_p zależne tylko od p i takie, że*

$$A_p \int_0^1 \Big(\sum x_\nu^2\Big)^{p/2} dt \leqslant \int_0^1 \Big|\sum x_\nu\Big|^p dt \leqslant B_p \int_0^1 \Big(\sum x_\nu^2\Big)^{p/2} dt. \tag{51}$$

b) *Jeżeli szereg $\sum x_n(t)$ funkcji niezależnych jest sumowalny prawie wszędzie jakąś metodą liniową, to jest zbieżny prawie wszędzie.*

Pozycje [22], [23], [27] bibliografii to trzy części tej samej pracy. Zawierają one szereg nowych i ciekawych wyników, jak również nowe dowody znanych twierdzeń. Większość twierdzeń tu rozważanych jest następującego typu. Przypuśćmy że dla każdego naturalnego n mamy zmienne losowe niezależne $x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, \ldots$ Przyjmujemy $S_n = \sum_\nu x_{n,\nu}$ i pytamy, jakie warunki konieczne i wystarczające muszą spełniać zmienne $x_{n,\nu}$, aby dystrybuanta graniczna dla dystrybuant sum S_n istniała i miała funkcję charakterystyczną posiadającą określone własności w dziedzinie zespolonej. Np. kiedy ta funkcja charakterystyczna

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dV(t) \tag{52}$$

jest wartością brzegową funkcji analitycznej w prostokącie

$$|x| \leqslant R, \quad 0 < y < R \quad (z = x + iy)?$$

Kiedy $\varphi(x)$ da się rozszerzyć jako funkcja analityczna na pas $-R < y < R$? Kiedy $\varphi(x)$ jest regularna w pobliżu $x = 0$? Do tej kategorii należą też pytania: kiedy $\varphi(x)$ jest z góry przepisaną funkcją, w szczególności np. kiedy sumy S_n zdążają, w prawdopodobieństwie, do zmiennej gaussowskiej, Poissona etc. W pracy [49] podane są warunki na to, by granica S_n podlegała jednemu z praw wyjątkowych Lévy'ego.

Praca [35] podaje nową własność prawa Gaussa: *Jeżeli $x_1, x_2, \ldots$ są zmiennymi losowymi niezależnymi, mającymi tę samą dystrybuantę oraz skończone momenty wszystkich rzędów i jeżeli przy pewnych stałych a_ν i b_ν sumy $\sum a_\nu x_\nu$ i $\sum b_\nu x_\nu$ istnieją i mają te same dystrybuanty, to albo ciągi $\{|a_\nu|\}$ i $\{|b_\nu|\}$ różnią się tylko porządkiem wyrazów, albo x_ν są zmiennymi gaussowskimi.*

Praca [35] zawiera inne ważne dla zastosowań twierdzenie, zwane często *twierdzeniem Marcinkiewicza: Niech $P_m(t)$ będzie wielomianem*

stopnia $m > 2$. *Wówczas funkcja* $f(t) = \exp P_m(t)$ *nie jest funkcją charakterystyczną.* Marcinkiewicz otrzymuje to twierdzenie jako szczególny przypadek ogólniejszego twierdzenia, a mianowicie, że *funkcja całkowita skończonego rzędu* ϱ, *której wykładnik zbieżności jest mniejszy niż* ϱ, *nie może być funkcją charakterystyczną.*

Przechodzę teraz do ostatniej pracy, [*19*]. Tematem jej jest pytanie, czy w twierdzeniu Kołmogorowa o iterowanym logarytmie można osłabić założenie o rzędzie wielkości zmiennych losowych. Twierdzenie Kołmogorowa mówi, że jeżeli $x_1, x_2, \ldots$ są zmiennymi losowymi niezależnymi o nadziejach matematycznych równych zeru, drugich momentach $b_1, b_2, \ldots$, i jeżeli położymy $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, to z prawdopodobieństwem równym jedności mamy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} = 1, \tag{53}$$

jeżeli tylko liczby B_n i $M_n = \max x_n$ spełniają warunki

$$B_n \nearrow \infty, \qquad M_n = o\left\{\left(\frac{B_n}{\log\log B_n}\right)^{1/2}\right\}. \tag{54}$$

Okazuje się, że *drugi warunek* (54) *nie da się osłabić, i jeżeli zastąpimy tu* o *przez* O, *to konkluzja* (53) *może być fałszywa.* W konkretnie podanym przykładzie lewa strona (53) jest, z prawdopodobieństwem 1, mniejsza od 1.

Może wypada tu wspomnieć o dwu uwagach, które zawdzięczam Marcinkiewiczowi, a które nie znalazły miejsca w pracy [*19*], jakkolwiek są łatwymi i ciekawymi konsekwencjami otrzymanych tam twierdzeń.

Pierwsza uwaga jest jak następuje. *Niech* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *będzie ciągiem zmiennych losowych niezależnych przyjmujących tylko wartości* $+1$ *i* -1, *każdą z prawdopodobieństwem* $\frac{1}{2}$ (zmienne Bernoulliego), *i niech* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Wówczas, jeżeli* $B_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \to \infty$, *to z prawdopodobieństwem* 1 *mamy nierówność*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{1}^{n} a_\nu x_\nu\right|}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} \leqslant 1. \tag{55}$$

Dowód jest powtórzeniem tej części klasycznego rozumowania Kołmogorowa, które daje znak $\leqslant$ zamiast $=$ w ogólnym twierdzeniu (53); wystarczy tylko zauważyć ze zmienna Bernoulliego x ma tę własność, że przy *każdym* a nadzieja mątematyczna dla e^{ax} nie przekracza $e^{a^2/2}$ (por. [*19*], str. 216).

Twierdzenie to można również wypowiedzieć w sposób następujący: Jeżeli $r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t), \ldots$ są funkcjami Rademachera (tzn. $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin 2^n \pi t$), to dla prawie wszystkich punktów przedziału $0 \leqslant t \leqslant 1$ mamy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_1^n a_\nu r_\nu(t)}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} \leqslant 1 \quad (B_n = \sum_1^n a_\nu^2), \tag{56}$$

jakiekolwiek byłyby liczby $a_1, a_2, \ldots$ spełniające warunek $B_n \to \infty$.

Druga uwaga jest łatwą konsekwencją pierwszej. *Jeżeli $x_1, x_2, \ldots$ są dowolnymi zmiennymi losowymi niezależnymi i symetrycznymi (to ostatnie oznacza, że x_n oraz $-x_n$ mają te same dystrybuanty), i jeżeli z prawdopodobieństwem 1 mamy*

$$X_n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \to \infty, \tag{57}$$

to z prawdopodobieństwem 1 mamy też nierówność

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_1^n x_\nu}{(2X_n \log\log X_n)^{1/2}} \leqslant 1. \tag{58}$$

Dla dowodu potraktujmy zmienne losowe x_n jako funkcje niezależne $x_n(\omega)$ określone w przestrzeni miarowej Ω i rozważmy funkcje niezależne $x_n(\omega) r_n(t)$ zależne od parametru t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $t \neq p2^{-q}$. W myśl (56) i (58) dla dowolnego ω, dla którego $X_n \to \infty$ i dla prawie wszystkich t mamy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^n x_\nu(\omega) r_\nu(t)}{(2X_n(\omega) \log\log X_n(\omega))^{1/2}} \leqslant 1. \tag{59}$$

W myśl twierdzenia Fubiniego, istnieje takie t_0 (prawie wszystkie t_0 mają tę własność), że dla $t = t_0$ i dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ zachodzi (59). Wystarczy teraz zauważyć, że ze względu na symetrię zmiennych x_ν, możemy tu w liczniku zastąpić $x_\nu(\omega) r_\nu(t_0)$ przez $x_\nu(\omega)$.

Spis prac naukowych Józefa Marcinkiewicza

[1] *A new proof of a theorem on Fourier series*, J. London Math. Soc. 8 (1933), str. 179.

[2] *On a class of functions and their Fourier series*, C. R. Soc. Sci. Varsovie 26 (1934), str. 71-77.

[3] *Sur les nombres dérivés*, Fund. Math. 24 (1935), str. 305-308.

[4] *Wielomiany interpolacyjne funkcji bezwzględnie ciągłych (Polynômes d'interpolation des fonctions absolument continues)*, Wiadom. Mat. 39 (1939), str. 85-125.

[5] *On the convergence of Fourier series*, J. London Math. Soc. 10 (1935), str. 264-268.

[6] *On Riemann's two methods of summation*, J. London Math. Soc. 10 (1935), str. 268-272.

[7] —, B. Jessen and A. Zygmund, *Note on the differentiability of multiple integrals*, Fund. Math. 25 (1935), str. 217-234.

[8] *Sur les séries de Fourier*, Fund. Math. 27 (1936), str. 38-69.

[9]— and A. Zygmund, *On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series*, Fund. Math. 26 (1936), str. 1-43.

[10] *Sur la convergence des séries orthogonales*, Studia Math. 6 (1936), str. 39-45.

[11] *Sur l'interpolation I*, Studia Math. 6 (1936), str. 1-17.

[12] *Sur l'interpolation II*, Studia Math. 6 (1936), str. 67-81.

[13] *Quelques remarques sur l'interpolation*, Acta Litt. Sci. Szeged 8 (1936/37), str. 127-130.

[14] *Sur la divergence des polynomes d'interpolation*, Acta Litt. Sci. Szeged 8 (1936/37), str. 131-135.

[15] — and A. Zygmund, *Some theorems on orthogonal systems*, Fund. Math. 28 (1937), str. 309-335.

[16] — et A. Zygmund, *Sur les fonctions indépendantes*, Fund. Math. 29 (1937), str. 60-90.

[17] — and A. Zygmund, *Mean values of trigonometrical polynomials*, Fund. Math. 28 (1937), str. 131-166.

[18] — and A. Zygmund, *Two theorems on trigonometrical series*, Rec. Math. Moscou (Mat. Sbornik) 2 (44) (1937), str. 733-737.

[19] — et A. Zygmund, *Remarque sur la loi du logarithme itéré*, Fund. Math. 29 (1937), str. 215-222.

[20] *Quelques théorèmes sur les séries orthogonales*, Ann. Soc. Polon. Math. 16 (1937), str. 84-96.

[21] *O sumowalności szeregów ortogonalnych* (*Sur la sommabilité des séries orthogonales*), Wiadom. Mat. 44 (1938), str. 5-16.

[22] *Sur les fonctions indépendantes I*, Fund. Math. 30 (1938), str. 202-214.

[23] *Sur les fonctions indépendantes II*, Fund. Math. 30 (1938), str. 349-364.

[24] *Sur les suites d'opérations linéaires*, Studia Math. 7 (1938), str. 52-72.

[25] — et A. Zygmund, *Quelques théorèmes sur les fonctions indépendantes*, Studia Math. 7 (1938), str. 104-120.

[26] — et S. Kaczmarz, *Sur les multiplicateurs des séries orthogonales*, Studia Math. 7 (1938), str. 73-81.

[27] *Sur les fonctions indépendantes III*, Fund. Math. 31 (1938), str. 86-102.

[28] *Quelques théorèmes sur les séries et les fonctions*, Bull. Sémin. Math. Univ. Wilno 1 (1938), str. 19-24.

[29] *Quelques théorèmes sur les séries orthogonales lacunaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 17 (1938), str. 51-56.

[30] — and A. Zygmund, *Proof of a gap theorem*, Duke Math. J. 4 (1938), str. 469-472.

[31] — and A. Zygmund, *A theorem of Lusin*, Duke Math. J. 4 (1938), str. 473-485.

[32] *Sur quelques intégrales du type de Dini*, Ann. Soc. Polon. Math. 17 (1938), str. 42-50.

[33] *Un théorème sur l'interpolation*, Mathematica, Cluj 14 (1938), str. 36-38.

[34] — et A. Zygmund, *Sur les séries de puissances*, Mathematica, Cluj 14 (1938), str. 21-30.

[35] *Sur une propriété de la loi de Gauss*, Math. Z. 44 (1939), str. 612-618.

[36] *Une remarque sur les espaces de M. Besicowitch*, C. R. Acad. Sci. Paris 208 (1939), str. 157-159.

[37] *Sur le problème des moments*, C. R. Acad. Sci. Paris 208 (1939), str. 405-407.

[38] *Sur la sommabilité H_k de séries de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris 208 (1939), str. 782-784.

[39] *Sur les séries orthogonales*, Studia Math. 8 (1939), str. 1-27.

[40] *Sur les multiplicateurs des séries de Fourier*, Studia Math. 8 (1939), str. 78-91.

[41] *Sur une propriété du mouvement brownien*, Acta Litt. Sci. Szeged 9 (1938-40), str. 77-87.

[42] — et S. Bergmann, *Sur les valeurs limites des fonctions de deux variables complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris 208 (1939), str. 877-879.

[43] *Sur une méthode remarquable de sommation des séries doubles de Fourier*, Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 8. (1939), str. 149-160.

[44] *Sur l'interpolation d'opérations*, C. R. Acad. Sci. Paris 208 (1939), str. 1272-1273.

[45] — et A. Zygmund, *Quelques inégalités pour les opérations linéaires*, Fund. Math. 32 (1939), str. 115-121.

[46] — and A. Zygmund, *On the summability of double Fourier series*, Fund. Math. 32 (1939), str. 122-132.

[47] *Sur les variables aléatoires enroulées*, C. R. Soc. Math. France, année 1938 (1939), str. 34-36.

[48] *Sur la sommabilité forte de séries de Fourier*, J. London Math. Soc. 14 (1939), str. 162-168.

[49] *Quelques théorèmes de la théorie des probabilités*, Bull. Sém. Math. Univ. Wilno 2 (1939), str. 22-34.

[50] *Sur une nouvelle condition pour la convergence presque partout des séries de Fourier*, Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 8 (1939), str. 239-240.

[51] — et A. Zygmund, *Sur la derivée seconde généralisée*, Bull. Sém. Math. Univ. Wilno 2 (1939), str. 35-40.

[52] *Sur la convergence absolue des séries de Fourier*, Mathematica, Cluj 16 (1940), str. 66-73.

[53] — et R. Salem, *Sur les sommes riemanniennes*, Compositio Math. 7 (1940), str. 376-389.

[54] — and A. Zygmund, *On the behavior of trigonometric series and power series*, Trans. Amer. Math. Soc. 50 (1941), str. 407-453.

[55] — et S. Bergmann, *Sur les fonctions analytiques de deux variables complexes*, J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. 21 (1942), str. 125-141, oraz Fund. Math. 33 (1945), str. 75-94.

Prace cytowane

[1] A. S. Besicovitch, *On a general metric property of summable functions*, Journal of the London Math. Soc. 1 (1926), str. 120-128.

[2] M. Cotlar, *A general interpolation theorem for linear operations*, Revista matemática Cuyana 1 (1955), str. 55-84.

[3] M. Cotlar, *A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems*, Revista matemática Cuyana 1 (1955), str. 105-167.

[4] M. Cotlar and M. Bruschi, *On the convexity theorems of Riesz-Thorin and Marcinkiewicz*, Revista de la Unión Matemática Argentina 18 (1957), str. 162-172.

[5] G. Grünwald, *Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome*, Acta Szeged 7 (1935), str. 207-221.

[6] G. Grünwald, *Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Polynome der stetigen Funktionen*, Annals of Mathematics 37 (1936), str. 908-918.

[7] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *On the strong summability of Fourier series*, Fund. Math. 25 (1935), str. 162-189.

[8] A. N. Kolmogoroff, *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout*, Fund. Math. 4 (1923), str. 324-328.

[9] A. N. Kolmogoroff, *Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier*, Fund. Math. 7 (1925), str. 23-28.

[10] B. Kuttner, *Some relations between different kinds of Riemann summability*, Proc. London Math. Soc. 40 (1936), str. 524-540.

[11] S. Łoziński, *On the convergence and summability of Fourier series and interpolation processes*, Mat. Sbornik 14 (1944), str. 175-263.

[12] С. Г. Михлин, *О мультипликаторах интегралов Фурье*, Доклады Акад. Наук, 109 (1956), str. 701-703.

[13] E. Ostrow and E. Stein, *A generalization of lemmas of Marcinkiewicz and Fine with applications to singular integrals*, Annali di Pisa 11 (1957), str. 117-135.

[14] A. Plessner, *О сопряженных тригонометрических рядах*, Доклады Акад. Наук, 4 (1935), str. 235-238.

[15] S. Saks, *On the strong derivatives of functions of intervals*, Fund. Math. 25 (1935), str. 245-252.

[16] D. Spencer, *A function theoretic identity*, American Journal of Math. 65 (1943), str. 147-160.

[17] E. Stein, *A maximal function with applications to Fourier series*, Annals of Mathematics 68 (1958), str. 584-603.

[18] E. Stein, *On the functions of Littlewood-Paley, Lusin and Marcinkiewicz*, Transactions of the American Math. Soc. 88 (1958), str. 430-466.

[19] E. Stein and G. Weiss, *An extension of a theorem J. Marcinkiewicz and some of its applications*, Journal of Mathematics and Mechanics 8 (1959), str. 263-284.

[20] M. Weiss and A. Zygmund, *On the existence of conjugate functions of higher order* Fund. Math. 48 (1960), str. 175-187,

[21] A. Zygmund, *On certain integrals*, Transactions of the American Math. Soc. 55 (1944), str. 170-204.

[22] A. Zygmund, *On the summability of multiple Fourier series*, American Journal of Mathematics 69 (1947), str. 836-850.

[23] A. Zygmund, *On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations*, Journal de Math. 35 (1956), str. 223-248.

[24] A. Zygmund, *On singular integrals*, Rendiconti di Matematica 16 (1957), str. 468-505.

[25] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2 wyd., Cambridge 1959, t. I, str. 1-383, t. II, str. 1-354.