ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IV (1960)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

G. CHOQUET (Paris)

Matematyka współczesna a nauczanie

Artykuł ten stanowi streszczenie odczytów wygłoszonych 27. 9. 58 w Bazylei w Szwajcarskim Towarzystwie Nauczycieli Matematyki i Fizyki oraz 18. 11. 58 w Sèvres w czasie międzynarodowego kursu nauczycieli matematyki zorganizowanego przez Europejską Organizację Współpracy Ekonomicznej.

Łatwiej będzie zrozumieć palącą potrzebę i powszechne znaczenie rozważań, którym poświęcony jest ten artykuł, uświadomiwszy sobie rozmach podobnych badań rozwijających się w ostatnim dziesięcioleciu na całym świecie, w Europie, w Azji bądź w Ameryce. Świat przeżywa wielką rewolucję, stara się dostosować do nowych warunków ekonomicznych i demograficznych, chce zrozumieć nowe pojęcia.

Matematycy z różnych powodów znajdują się w centrum tego ruchu. Wszędzie poszukuje się techników, inżynierów, uczonych, a ciągle brak profesorów do ich kształcenia. Od szkół wszystkich stopni żąda się rozszerzenia i ulepszenia programu studium matematyki.

Profesorowie wyższych uczelni i liceów otrząsają się właśnie ze zbyt długiego bezwładu. Pierwsi stwierdzają, że młodzi studenci przybywający na uniwersytet mają umysł przeciążony zdewaluowanymi wiadomościami i przestarzałymi sposobami myślenia. Gdy otwierają podręczniki szkolne, są przerażeni brakiem precyzji języka, niedostatecznym rozbudowaniem podstaw, zbędnymi często komplikacjami, złośliwymi nowotworami, które narosły na konstrukcji Euklidesa. Drudzy spostrzegają, otworzywszy jakąkolwiek niedawno wydaną publikację matematyczną z algebry, analizy czy geometrii, że nie rozumieją nawet jej języka; pytają się wówczas, czy to jest jeszcze matematyka i jeśli tak, to na co może się przydać ich praca pedagogiczna. Tak we wszystkich krajach rozpoczyna się rozmowa między uczonymi i nauczycielami.

Narzuca się wówczas ważne pytanie: czego uczyć, jak uczyć i kogo uczyć? Jakie wykształcenie dać przyszłym nauczycielom szkół średnich?

Nie można na nie odpowiedzieć prosto ani jednoznacznie; nie buduje się bez fundamentów — odpowiedź musi uwzględniać specyfikę historyczną i ekonomiczną każdego kraju oraz jego zasoby w ludziach. Jednakże szybkość, zasięg komunikacji i informacji prowadzą do tego,

że świat, mimo podziałów, staje się z każdym dniem bardziej świadomy swej jedności; okazuje się, że umysł ludzki, nieuformowany jeszcze wykształceniem ani nie sklerotyzowany wiekiem, ma wszędzie ten sam krój. Można więc spodziewać się wytyczenia powszechnych linii obecnych przemian i ogólnych zasad mogących doprowadzić do zadowalających rozwiązań naszego problemu.

Jaki jest cel nauczania?

Przeciwstawia się często następujące dwie koncepcje nauczania matematyki:

Koncepcja A. Jest pewien zasób wiadomości, które każdy przyszły inżynier, technik, uczony powinien posiadać; celem naszego nauczania jest wyposażenie w nie uczniów, a pedagogika jest sztuką znalezienia najlepszej drogi do celu.

Oto punkt widzenia części ludzi stosujących matematykę — inżynierów, fizyków czy chemików.

Koncepcja B. Nauczanie matematyki jest szkołą poprawnego, logicznego myślenia. Nieważne, co się w młynku matematycznym miele — idzie o to, by nauczyć się mleć według reguł.

Taki jest punkt widzenia pewnych logików, filozofów i humanistów.

Bez wątpienia oba te poglądy są rzadko wypowiadane w tak ostrej formie, ale można je znaleźć u podstawy dyskusji przeciwstawiających sobie codziennie stronników rozmaitych wariantów reformy nauczania; nie są one oczywiście nowe i stanowią tylko jeden aspekt klasycznej dyskusji tak barwnie zilustrowanej przez Rabelais'go.

Rosnące znaczenie maszyn w naszej cywilizacji może nam dopomóc do dokładniejszej oceny wartości tych poglądów. Maszyny wzięły na siebie, w trakcie swej ewolucji, zadania coraz to bardziej złożone i zastępują powoli człowieka w dziedzinach siły fizycznej, komunikacji, słowa, pamięci, rachunku; niektóre będą mogły wkrótce tłumaczyć, podejmować decyzje na podstawie dużego zasobu informacji, a nawet w takich sytuacjach uwzględniać swoje doświadczenie. Są więc zdolne do czynności, które według dotychczasowych mniemań wymagały ludzkiej inteligencji: rachowanie, prowadzenie księgowości, tłumaczenie. Stawiają przed nami pytanie: co odróżnia umysł człowieczy od maszyny?

Człowiek uważa się za wyższego od maszyny dlatego, że to on ją skonstruował, rozumie ją, może ona robić tylko to, do czego jest przeznaczona; on zaś, przeciwnie, bez przerwy buduje się na nowo, staje się coraz bardziej złożony: czuje możność przekroczenia każdej z góry zadanej granicy.

Człowiek jest twórcą: celem nauczenia powinno więc być przede wszystkim budzenie i rozwijanie zdolności twórczych uczniów.

Koncepcja A jest więc obecnie nie do utrzymania: „zasób wiadomości" ma swe miejsce w tablicach, książkach, w pamięci maszyn; jednym z naszych celów będzie zresztą pokazanie uczniom, jak należy się posługiwać tablicami i książkami, jak zdobywać informacje. Ale i druga koncepcja nie wytrzymuje krytyki: aktywność matematyczna nie polega na umiejętności wyprowadzania z pewnych przesłanek długich łańcuchów poprawnych wniosków, to potrafią robić maszyny, przecież to już dawno Turing wymyślił maszynę logiczną umiejącą wypisywać twierdzenia logiki formalnej.

Matematyka nie rozwija się w sposób prosty; matematyk nie tylko *obiera* jako podstawowe aksjomaty zdania piękne i ciekawe — dwa pojęcia bardzo ludzkie — ale w każdej chwili musi wybierać swą drogę, wybierać dobre definicje, interesujące pojęcia. Twórca musi umieć *obserwować*, *wybierać*, *wnioskować* i *działać*: każdy etap budowanej teorii wymaga od niego tych umiejętności.

Rolą nauczyciela staje się pokazywanie uczniowi mechanizmu tworzenia i dlatego nie może on posługiwać się lepszym modelem niż praca uczonego, twórcy; nie wypełni on zresztą swego zadania, jeśli sam choćby w najskromniejszym zakresie nie wykaże aktywności twórczej, na przykład zastanawiając się, bez żadnych danych, bez pomocy książek, nad swymi wykładami. Zauważyliśmy wszyscy, że w dniu, w którym zastanawialiśmy się głęboko i pogodnie nad wykładem, uczniowie byli bardziej uważni, bardziej inteligentni. Łatwiej nam przeprowadzić uczniów z jednego poziomu umysłowego na drugi, gdy sami dopiero co odbyliśmy tę drogę. Tak samo jak powstający tlen jest bardziej aktywny, nasze świeże odkrycie na nowo pewnych partii matematyki budzi żywsze echo wśród uczniów.

Obie koncepcje A i B zawierają cząstkę prawdy: każdy organizm żywy składa się z pierwiastków chemicznych, którymi rządzą określone prawa fizyczne. Ale współistnienie pierwiastków chemicznych i praw fizycznych nie wystarcza jeszcze do stworzenia istoty żyjącej.

Model, którego szukamy, znajdziemy w działalności fizyka: on obserwuje i wybiera; rozmyśla nad swymi obserwacjami i wyciąga z nich konsekwencje praktyczne (schematy nowych doświadczeń, konstrukcje aparatur itd.).

Tak więc doszliśmy do rozróżnienia trzech aspektów nauczania matematyki.

1. W pierwszej fazie matematyk jest obserwatorem. Rozporządza on — podano mu go, lub wyszukał go sobie sam — pewnym materiałem (fizycznym lub umysłowym, gdy ma już pewne doświadczenie), ekspe-

rymentuje na tym materiale, wyzwala prawa i naturalne pojęcia (będą to aksjomaty i w bardziej zaawansowanym stadium — definicje).

Na przykład Desargues posługując się materiałem złożonym z kartek papieru, linijek, ołówków wyzwala aksjomaty geometrii rzutowej. Matematyk manipulując kartkami papieru, które może zginać, linijką, cyrklem, ołówkiem wyzwoli aksjomaty geometrii płaszczyzny oparte na pojęciu symetrii względem prostej.

2. Wychodząc z tak wyzwolonych praw i pojęć, wyprowadza się, przestrzegając zasad rozumowania logicznego, twierdzenia. To jest okres dedukcji.

3. Twierdzenia dostarczają nowego materiału; zanotuje się je w książkach, może posłużą z kolei jako materiał, którego studium zapewni dalszy postęp, może wreszcie staną się narzędziem fizyka czy chemika.

Te trzy okresy, które upodabniają pracę matematyka do pracy fizyka zajmującego się rzeczywistością matematyczną, stanowią rodzaj cyklu. Zauważyliśmy już zresztą, że każdy duży cykl jest złożony z bez liku cykli mniejszych; każdy krok badacza rozkłada się w istocie na trzy okresy, które rozważaliśmy. Okresy 3 i 2 odpowiadają dość dokładnie dwu koncepcjom klasycznym A i B których niedostateczność skrytykowaliśmy przed chwilą; będziemy się więc starali obecnie przede wszystkim podkreślić znaczenie pierwszego okresu dla pedagogiki.

Jeśli dziecko powinno umieć obserwować, wybierać, wyzwalać prawa i pojęcia, trzeba mu stworzyć warunki sprzyjające tej działalności. Konkretny materiał jest zbyt często w pogardzie u nauczycieli, którzy ograniczają się do nauki dedukcyjnego myślenia (to właśnie ci twierdzą, że istnieją uczniowie całkowicie niezdolni do matematyki); ale każdy, kto w mniejszym lub większym stopniu używał w swej praktyce sznurków, gumek, kawałków plastiku, zegarka, cienia, ustawienia drzew w sadzie itp., zna całe bogactwo sytuacji matematycznych, które przedmioty te narzucają lub sugerują.

Kino może tworzyć sytuacje, których nie dostarczy żaden inny materiał (filmy Nicoleta, Fletchera i in.), pełne dynamiki właściwej samej jego istocie: w dobrym filmie nie ma figur izolowanych, przekształcają się one, łączą w rodziny podobnych sobie; film stanowi więc materiał szczególnie dobrze przystosowany do ilustrowania tej strony matematyki współczesnej, którą nazwaliśmy przed chwilą dynamizmem. Istnieje wreszcie materiał abstrakcyjny: u ucznia z pewnym doświadczeniem istnieje cały skarbiec wyobrażeń wywołanych przez dobrze przyswojone sytuacje matematyczne, które to wyobrażenia stały się dla niego równoważne materiałowi konkretnemu. Nauczyciel może czerpać z tego skarbca — powinien znać jego zawartość — kombinować w miarę potrzeby kilka takich wyobrażeń, aby stworzyć sytuację prostą lecz płodną, o zawar-

tości intuicyjnej zdolnej doprowadzić do przyswojenia sobie nowego pojęcia. W każdym wypadku wybór i badanie dobrze dobranej sytuacji matematycznej będzie istotnym etapem, właśnie w trakcie jej badania nauczyciel z radością zaobserwuje jak uczniowie kolejno rozjaśniają się i mówią: „teraz zrozumiałem".

Znaczenie tego pierwszego okresu wymaga dobrej znajomości psychologii dziecka. Ponieważ nie idzie tylko o *nauczenie* go pewnych rzeczy, o *umiejętność* stosowania pewnych reguł (upraszczanie ułamków, przenoszenie wyrazów z jednej strony równania na drugą itd.), ale o zaapelowanie do jego wyższych zdolności, jest ważne abyśmy wiedzieli, jaki wiek sprzyja najbardziej przyswojeniu takiego czy innego pojęcia, jakie powstają trudności, jakie sytuacje należy uczniowi przedstawić, aby nie pomylił różnych struktur (dzielenie zamiast odejmowania itp.).

Ciągle zbyt mało uwagi poświęcają psychologowie tym problemom. Wszyscy powinniśmy współpracować w tym dziele, pasjonować się pytaniem, jak funkcjonuje mózg naszego dziecka. Jeśli nie będziemy tego robić, zawsze zostanie między nim i nami bariera, a język, którym mówimy, będzie dlań najmniej zrozumiałym z języków obcych.

Gdy przestajemy widzieć w matematyce świętą konstrukcję opartą na wiecznych przesłankach, z niezachwianym porządkiem twierdzeń i gdy akcentujemy działalność twórczą, rozszerzamy zadziwiająco zakres naszego nauczania. Rzeczywistość, konkretna czy abstrakcyjna jest bogata w ukryte struktury, trudno przyjmować jedne z nich odrzucając inne. Słowo „geometria" nabiera wówczas szerszego znaczenia, geometria staje się na nowo badaniem zjawisk matematycznych, które przedstawia nam świat; nie ma wówczas powodu ograniczać się do badania grupy przesunięć czy podobieństw. Cienie, perspektywy narzucają nam geometrię rzutową, kauczuk, tkaniny prowadzą nas do ogólniejszych jeszcze przekształceń. Figury trójwymiarowe stają się ważniejsze od płaskich; świat współczesny sugeruje nam układy osi współrzędnych. Symetria zajmuje znowu swe podstawowe miejsce. Przypadek narzuca się jako przedmiot badania.

Jeśli chcemy wyprowadzić z matematyki reguły działania w świecie, trzeba, żeby tkwiła ona w tym świecie swymi korzeniami, powinniśmy więc zaprzestać odrzucania z zakresu naszego nauczania pewnych pojęć podstawowych dla rozwijania wyrafinowanej doktryny, której liczne części, zachowując pewną elegancję, są mocno podstarzałe.

Jakiej matematyki należy uczyć

Zobaczyliśmy dopiero co, że chcąc uszanować i rozwinąć działalność twórczą uczniów, zmuszeni jesteśmy, studiując materiał dostarczany przez rzeczywistość, rozszerzyć zbiór pojęć, które powinni sobie oni

przyswoić. Drugą konieczność dyktuje nam psychologia dziecka: matematyka, której będziemy je uczyć, musi być dostosowana do kształtujących się struktur umysłowych.

Zadaniem naszym jest także stworzenie mocnej więzi między nauczaniem i badaniem naukowym; powinniśmy więc w miarę możności uczyć matematyki, która zadowoliłaby badacza, zarówno swoim językiem i ścisłością jak i doborem rozważanych pojęć — niech będą to te pojęcia, które badacz uzna za podstawowe.

Chcemy również, aby matematyka, której będziemy uczyć, realizowała zasady ekonomii myślenia. Matematycy znaleźli się w sytuacji analogicznej do tej, w jakiej był przemysł na początku naszego stulecia: od czasu zastosowania maszyn na wielką skalę fabryki rozrastały się, stawały coraz ciaśniejsze, produkcja komplikowała się, można było obawiać się, czy ta komplikacja nie zahamuje dalszego postępu. Jednak znaleziono rozwiązanie; zburzono stare fabryki, a na ich miejsce wzniesiono nowe, pełne światła, doskonale zorganizowane, produkujące więcej z mniejszym hałasem i wysiłkiem. Nasze programy matematyczne również cierpią na hipertrofię; jeśli chcemy zadowolić techników, fizyków czy statystyków, musimy budować od nowa, w tym kłębowisku zaułków przebić szerokie aleje, które prowadziłyby szybko do wszystkich ważnych pojęć obecnie używanych i stanowiły dobre podłoże do powstawania i rozwoju pojęć nowych.

Chcemy wreszcie, aby matematyka, której będziemy uczyć, była przyjemna, by porywała umysły — byłby to właśnie nasz największy atut.

Wymagania dość duże, ale rozwiązanie istnieje; to matematyka współczesna, powstała dzięki wysiłkom wielu uczonych w ciągu ostatnich pięciu dziesiątków lat. Zresztą być może istnienie rozwiązania spełniającego wszystkie żądane warunki nie jest aż tak dziwne, trzeba przyjąć tylko, że umysł ludzki — a umysł dziecka jest gotów przekształcić się w umysł uczonego — jest w pełni zadowolony jedynie z konstrukcji prostych, wydajnych i przystosowanych do warunków, w których żyjemy.

Rzut oka na matematykę współczesną

Matematyka współczesna powstała z chwilą, gdy zdobyła odpowiedni języki — język teorii mnogości stworzony przez Cantora — i gdy zaawansowany rozwój pojęć matematycznych pozwolił odczuć brak teorii ogólnych. Nowa matematyka jest córą Kartezjusza, bo on to zbudował drogę syntezie tworząc potężne narzędzie geometrii analitycznej. Korzysta ona również z jego rady: „należy dzielić zawsze trudności na tak małe części, aby każda z nich dawała się osobno rozwiązać".

Przykład pomoże nam zrozumieć jedną z jej cech charakterystycznych; zbiór R liczb rzeczywistych posiada liczne własności: istnienie dodawania, mnożenia, porządku, pojęcia granicy. Oczywiście, w pewnych wypowiedziach o zbiorze R interweniuje tylko jedna, lub dwie takie własności; na przykład pojęcie wielomianu korzysta tylko z dodawania i mnożenia; pojęcie funkcji rzeczywistej rosnącej — tylko z pojęcia porządku. Każda z tych podstawowych własności odpowiada temu, co nazywamy obecnie *strukturą*. W naszym przykładzie mamy do czynienia ze strukturą ciała, strukturą porządku i strukturą topologiczną.

Takie właśnie struktury są narzędziem matematyki; każda z nich jest prosta i odbija jedną tylko stronę badanego zjawiska. Dlatego nietrudno jest je studiować osobno, a ponieważ występują one w całej matematyce, warto badać je głęboko i skrupulatnie. Najważniejsze z tych struktur to:

1. struktury zdefiniowane przez relację równoważności,
2. struktury częściowego porządku, w szczególności struktura porządku,
3. struktury algebraiczne, w szczególności grupy, pierścienie, ciała, przestrzenie wektorowe,
4. struktury topologiczne, pozwalające sprecyzować pojęcia ciągłości i deformacji.

Doświadczony matematyk spostrzega szybko, jakie struktury trzeba rozpatrywać badając dany problem i może natychmiast dysponować całym arsenałem twierdzeń o tych strukturach. Praca jego jest zresztą uproszczona przez przeprowadzone już badania pewnych struktur, nazywanych złożonymi, które wynikają z jednoczesnego istnienia dwu czy więcej struktur podstawowych, powiązanych zresztą pewnymi warunkami zgodności.

Przykład struktury złożonej: grupa topologiczna. Jest to zbiór, w którym określona jest struktura grupy i struktura przestrzeni topologicznej. Obie one są związane ze sobą: mnożenie i branie elementu odwrotnego w grupie są funkcjami ciągłymi. Można przytoczyć również inne przykłady: przestrzeń wektorowa topologiczna, grupa uporządkowana itp.

W pewnych zagadnieniach interweniuje jednocześnie bardzo wiele struktur. Taka jest sytuacja w teorii potencjału, rozmaitościach różniczkowalnych i równaniach różniczkowych cząstkowych.

Badanie struktury matematycznej podstawowej (pokażemy to na przykładach) opiera się na małej liczbie aksjomatów. Nie zakładając nic o badanych przedmiotach, zajmujemy się tylko związkami, jakie między nimi zachodzą. Wynika stąd wielka ogólność. Twierdzenia matematyki współczesnej dotyczą niemal zawsze nie jednego, ale obszernej

klasy przedmiotów. Badacz jest zadowolony dopiero wówczas, gdy udało mu się dobrać definicje tak, że klasa przedmiotów spełniających twierdzenia rozważanej teorii nie może być powiększona bez gruntownej jej przebudowy. Ogólność ta ma dwie zalety: z jednej strony, oczywiście, pozwala ona zamknąć w jednym twierdzeniu wiele przypadków szczególnych, znanych lub nie, z drugiej zaś strony mnogość badanych przedmiotów ułatwia badanie każdego z osobna; każdy jest w pewnym sensie wyjaśniany przez pozostałe. To właśnie miałem na myśli mówiąc wyżej o dynamizmie matematyki współczesnej. Dynamizm ten jest zresztą bardziej dostępny dzięki wygodnemu operowaniu działaniami teorii mnogości i formalizmowi, który powołała ona do życia. Liczne dowody polegają na stosowaniu działań do jakiejś rodziny zbiorów: bierze się obraz, iloczyn, sumę, domknięcie, grupę generowaną itd. Pod tym względem matematyka nowoczesna stosuje się doskonale do wskazówki pedagogiki głoszącej, że aby zrozumieć dobrze jakąś własność, należy porównać ją z własnościami sąsiednimi, zbadać jej zaprzeczenie itp. Szczegółowe i skrupulatne studium struktur podstawowych dostarczyło wreszcie matematykom pewnego, giętkiego i obrazowego języka, przyzwyczaiło ich do precyzji i zwięzłości nie znanej ich poprzednikom. Praktyka teorii aksjomatycznych nauczyła ich, jak należy formułować definicje, uczy, że dowód nie jest płynnym rozważaniem, lecz ma być podzielony harmonijnie na części (lematy i twierdzenia) o jasno określonych związkach logicznych.

Kilka struktur podstawowych. Przypomnimy teraz dobrze znane definicje kilku struktur wybranych dla ich wagi i prostoty: relacja równoważności, relacja porządku, grupa.

Psychologowie, w szczególności Piaget, podkreślają, że odpowiadają one strukturom umysłowym u dziecka. Nie jest to zresztą zaskakujące, przecież matematycy byli również dziećmi, tylko urośli, możemy więc znaleźć w zarodku u dzieci struktury, które później wydadzą się im najbardziej ważne i których użycie dostarczy im najwięcej zadowolenia.

Ogólnie, *relacją dwuczłonową* w zbiorze E nazywamy podzbiór S zbioru $E \times E$ (zbioru par uporządkowanych (x, y) elementów E). Mówimy wówczas, że *x i y pozostają w relacji S*, gdy $(x, y) \in S$; zapisuje się to również xSy. Na przykład gdy S jest przekątną Δ zbioru $E \times E$ (zbiorem par (x, x)), relacja S jest po prostu równością.

Relacja równoważności w E. Nazywamy tak relację (oznaczaną często $\sim$) posiadającą następujące własności:

a) dla każdego $x \in E$ zachodzi $x \sim x$ (zwrotność),

b) $(x \sim y)$ pociąga $(y \sim x)$ (symetria),

c) $(x \sim y)$ i $(y \sim z)$ pociąga $(x \sim z)$ (przechodniość).

Przykłady. 1. E = zbiór książek bliblioteki szkolnej; przyjmujemy $x \sim y$, gdy x i y mają ten sam kolor okładki.

2. E = zbiór uczniów jakiejś szkoły; przyjmujemy $x \sim y$, gdy x i y są uczniami tej samej klasy.

3. E = zbiór wielokątów płaskich; przyjmujemy $x \sim y$, gdy x i y mają równe pole powierzchni.

4. E = zbiór liczb całkowitych; przyjmujemy $x \sim y$, gdy $x-y$ jest podzielne przez 5.

5. E = zbiór prostych płaszczyzny euklidesowej; przyjmujemy $x \sim y$, gdy x i y są identyczne lub nie mają punktów wspólnych.

6. E = zbiór par liczb całkowitych $\geqslant 1$; kładziemy $(p, q) \sim (p', q')$, gdy $pq' = p'q$.

7. E = zbiór ciągów $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ liczb wymiernych takich, że $(x_p - x_q)$ dąży do 0, gdy p i q dążą do nieskończoności; przyjmujemy $x \sim y$, gdy $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$.

Każdej relacji równoważności S określonej w E odpowiada podział E na klasy równoważności, klasą elementu x jest zbiór wszystkich y równoważnych x.

Klasy te (każde dwie spośród nich są rozłączne lub identyczne) tworzą nowy zbiór E/S nazywany ilorazem E przez S.

Pojęcie zbioru ilorazowego jest potężnym środkiem pomagającym w poprawnym definiowaniu nowych obiektów matematycznych. Na przykład w przykładach 4, 5, 6, 7 elementy E/S są odpowiednio elementami ciała przemiennego rzędu 5, kierunkami prostych na płaszczyźnie, liczbami wymiernymi > 0, dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Relacja częściowego porządku w E jest to relacja (oznaczona przez $\prec$) taka, że

a) dla każdego $x \in E$ zachodzi $x \prec x$ (zwrotność),

b) $(x \prec y)$ i $(y \prec x)$ pociąga $x = y$ (antysymetria),

c) $(x \prec y)$ i $(y \prec z)$ pociąga $x \prec z$ (przechodniość).

Przykłady. 1. E = zbiór liczb całkowitych $\geqslant 1$; przyjmujemy $x \prec y$, gdy $x = y$ lub $y - x \in E$.

2. E = zbiór liczb całkowitych $\geqslant 1$; przyjmujemy $x \prec y$, gdy x jest dzielnikiem y.

3. E = zbiór wszystkich podzbiorów danego zbioru A; przyjmujemy $x \prec y$ (pisze się raczej $x \subset y$), gdy x jest podzbiorem y.

4. E = zbiór wielomianów zmiennej t o współczynnikach rzeczywistych; przyjmujemy $x \prec y$, gdy $x = y$ lub gdy w wielomianie $y - x$ współczynnik przy najniższej potędze t jest > 0.

5. E = zbiór funkcji rzeczywistych określonych na odcinku $\langle 0, 1\rangle$; przyjmujemy $x \prec y$, gdy dla każdego $t \in \langle 0, 1\rangle$ mamy $y(t) - x(t) \geqslant 0$.

W przykładzie 1 mamy do czynienia z *porządkiem*, to znaczy dwa dowolne elementy x i y zbioru E są porównywalne: jest $x \prec y$ lub $y \prec x$. Nie zachodzi to w przykładach dalszych.

Przykład 2 ilustruje teorię podzielności; wszystkie jej pojęcia (liczby pierwsze, n. w. w., n. w. d.) mogą być wyrażone w istocie w terminach porządku częściowego.

Struktura grupy. Pojęcie grupy abstrakcyjnej narodziło się z badania przedmiotów takich jak linia prosta, płaszczyzna zespolona (z operacją dodawania), oraz z badania grup przekształceń (grupy permutacji zbioru skończonego, grup ruchów sztywnych, przesunięć, jednokładności, podobieństw płaszczyzny lub przestrzeni trójwymiarowej R^3). Stanowi ono jeden z filarów matematyki współczesnej.

Zacznijmy od pojęcia bardziej ogólnego: *strukturą algebraiczną* (z jedną operacją) w zbiorze E nazywamy określenie pewnego działania, to jest przekształcenia $E \times E$ w E. Obraz pary (x, y) oznaczamy $x \cdot y$, xy lub $x+y$ w zależności od sytuacji.

Przykłady. Jeśli $E = R$, funkcje $(x, y) \to x+y$ lub xy, lub $x+2y$ są działaniami.

Jeśli $E =$ zbiór wszystkich podzbiorów danego zbioru A, to iloczyn (część wspólna) i suma są działaniami, oznaczamy je $(x, y) \to x \cap y$ i $x \cup y$. Natomiast gdy $E =$ odcinek $\langle 0, 1 \rangle$, funkcja $(x, y) \to x+y$ nie jest działaniem, ponieważ dla pewnych x i y punkt $(x+y)$ nie należy do E.

Element e zbioru E nazywamy *neutralnym*, jeśli dla każdego x zachodzi $ex = xe = x$. Oczywiście w E istnieje co najwyżej jeden element neutralny. Działanie nazywamy *łącznym*, gdy zawsze $(xy)z = x(yz)$.

Jeśli element neutralny e istnieje, mówimy, że x i x' są odwrotne, jeśli $xx' = x'x = e$. Gdy działanie jest łączne, każdy element posiada co najwyżej jeden element odwrotny.

Możemy teraz zdefiniować grupę:

Grupą nazywamy zbiór, w którym określone jest działanie łączne, posiadający element neutralny i którego każdy element ma element odwrotny.

Tak więc działanie $(x, y) = x \cdot y$ w R nie jest operacją grupową, bo 0 nie ma elementu odwrotnego, ale jest już operacją grupową w $R^* = R - \{0\}$. Działanie dodawania zbiorów $(x, y) \to (x \cup y)$ ma element neutralny Ø (zbiór pusty), ale pozostałe elementy nie mają odwrotnego, nie jest to więc operacja grupowa.

Nie zawsze można natychmiast odpowiedzieć na pytanie, czy dane działanie jest operacją grupową. Rozważmy na przykład w zbiorze $E = (R^2)^*$ złożonym z par (a, b) liczb rzeczywistych nie równych jednocześnie zeru działanie następujące:

$$(a, b) \cdot (a', b') = [(aa' - bb'), (ab' + a'b)].$$

Poznajemy natychmiast definicję mnożenia liczb zespolonych różnych od zera, ale sprawdzenie bezpośrednie, czy to działanie posiada żądane własności, byłoby żmudne.

Grupy permutacji. Niech f i g będą dwiema permutacjami zbioru A, skończonego lub nie (permutacją A nazywamy przekształcenie wzajemnie jednoznaczne A na siebie). Iloczyn ich $h = f \circ g$, lub $f(g)$ definiujemy jako $h(x) = f[g(x)]$. Przez f^{-1} oznaczamy permutację odwrotną do f; mamy więc $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$, gdzie e jest przekształceniem tożsamościowym A na siebie.

Oczywiście zbiór permutacji zbioru A z tak określonym działaniem jest grupą (nieprzemienną, tj. $f \circ g$ nie musi być równe $g \circ f$), której elementem neutralnym jest e. Często interesujemy się tylko pewnymi podgrupami tej obszernej grupy.

Zanotujmy tu dość często spotykany błąd polegający na nazywaniu permutacją czy przekształceniem przedmiotów, które nimi nie są; na przykład mówi się często o grupie przekształceń homograficznych prostej R (homografią nazywamy przekształcenie określone przez wyrażenie wymierne $(ax+b)/(a'x+b')$, gdzie $(ab'-a'b) \neq 0$). Otrzymujemy grupę abstrakcyjną, wykonując formalne podstawienie takich wyrażeń wymiernych, ale nie jest to grupa permutacji, ponieważ wyrażenie $(ax+b)/(a'x+b')$ nie ma sensu, gdy $x = -b'/a'$ i punkt a/a' nie jest obrazem żadnego x. Aby ominąć tę trudność, dodaje się do R nowy element, zwany punktem w nieskończoności — otrzymany zbiór jest prostą rzutową.

Ta sama sytuacja powstaje, gdy na płaszczyźnie rozważamy złożenia inwersji (dodanie punktu w nieskończoności) lub przekształcenia rzutowe (dodanie prostej w nieskończoności). Te przykłady pokazują, jak troska o to, by mieć do czynienia z grupą permutacji, prowadzi do uzupełnienia rozważanej przestrzeni nowymi elementami.

Wpływ matematyki współczesnej na nauczanie

Przedstawiliśmy pewien projekt nauczania matematyki rozważając jednocześnie jego związki z pedagogiką. Zajmiemy się obecnie zbadaniem wpływu naszych propozycji na wybór pojęć podstawowych i zakres wykładanego materiału. Reforma mogłaby pójść dwiema drogami: drogą zasadniczych zmian lub drogą częściowego tylko uporządkowania obecnego stanu rzeczy. Nie będę zajmował się tutaj projektami przekształceń zasadniczych. Można sobie z pewnością wyobrazić wiele urzekających projektów, ale o wartości ich decydować będą zawsze powszechne i dostatecznie długotrwałe próby wcielenia ich w życie. Nie można abstrahować od trudności, na jakie próby te napotkałyby z pewnością:

istnienie oficjalnych programów, mała wciąż liczba nauczycieli przekonanych do nowego sposobu widzenia matematyki, ich brak doświadczenia. Nie przeczę, iż wysiłek musi być podjęty od zaraz, wiem, że gdy go podejmiemy, wyniki zachęcą innych do prowadzenia go dalej, ale etapem pierwszym, palącym, powszechnie i natychmiast dostępnym, niewielkim nawet kosztem, etapem stanowiącym bazę dla dalszych, bardziej zasadniczych przemian jest poprawa, mniej lub bardziej daleko idąca, *metod pedagogicznych* (liczne jedno lub kilkutygodniowe konferencje połączone z praktyką, dyskusje z psychologami i badaczami, aktywna współpraca z czasopismami pedagogicznymi), *podnoszenie poziomu intelektualnego nauczycieli* (odczyty, cykle wykładów, lektura, studium dostępnych działów matematyki współczesnej), które doprowadzi do rewizji *programów* i *podręczników*.

W najgrubszych zarysach zachowuje się obecne programy, usuwa się jednakże działy przestarzałe. Zmniejsza się znaczenie pewnych zbyt wybujałych działów (własności metryczne stożkowych, inwersja itp.), akcentuje się natomiast znaczenie zaniedbanych, a bardzo ważnych pojęć (pojęcie algebry, przekształcenia, przekształceń liniowych, wypukłości). Przestaje się uważać symetrię za tabu, stosuje się ją tam, gdzie tylko to jest możliwe.

Przywiązuje się wielką wagę do podstaw, przyjmując jeśli trzeba aksjomaty silniejsze, ale proste i przejrzyste. Używa się tylko dobrze zdefiniowanych słów. Definicje należy wybrać tak, aby podkreślić istnienie pewnych podstawowych struktur. Tak na przykład zamiast definiować: „dwie proste na płaszczyźnie nazywamy równoległymi, gdy nie posiadają punktów wspólnych", co prowadzi wobec braku przechodniości do nieprzyjemnych lub fałszywych wysłowień powiemy: „dwie proste na płaszczyźnie są równoległe, gdy są identyczne lub nie mają punktów wspólnych". Równoległość staje się wówczas relacją równoważności, której klasy abstrakcji definiują kierunki i fakt godny uwagi: stwierdzenie, że równoległość jest relacją równoważności jest równoważne piątemu postulatowi Euklidesa.

Szuka się dowodów używających tylko struktur istotnych dla badanego zagadnienia.

Przykłady. 1. Pojęcie granicy w zbiorze liczb rzeczywistych jest określone przy pomocy struktury porządku; lepiej więc będzie w związanych z nim zagadnieniach używać struktury porządku na prostej, niż struktury grupy.

2. Należy unikać korzystania z własności metrycznych przy dowodach własności afinicznych czy rzutowych.

3. Punktem wyjścia dla badania własności stożków (walców) powinna

być ich własność charakterystyczna: niezmienniczość ze względu na grupę jednokładności (przesunięć).

Matematycy dawno już uprościli klasyczne dowody elementarnych faktów, aby łatwiej im było je uogólnić. Mogą więc dostarczyć ujęć prostych i bardziej eleganckich od podręcznikowych, a często nawet odnowić całkowicie charakter jakiegoś rozdziału. Tak na przykład zastosowanie twierdzenia Pitagorasa pozwala otrzymać natychmiast (i to nawet w R^n) dowód znanego twierdzenia o trzech prostopadłych, wprowadzenie iloczynu skalarnego daje między innymi twierdzenie Pitagorasa i związki metryczne w trójkącie przy pomocy prostego rachunku.

Matematycy odkryli również potężne metody, których stosowanie pozwala uniknąć rozważania całej masy przypadków szczególnych, które ponadto otwierają drzwi nowego świata. Gdy taka metoda może być dostosowana do poziomu uczniów, ją właśnie należy wybrać. Tak na przykład znajdowanie funkcji pierwotnych powinno zastąpić przypadki poszczególne obliczania pól i objętości (czworościan, stożki, kula itp.).

Zagadnienie podstaw geometrii euklidesowej jest samo dla siebie zagadnieniem kluczowym. Naturalnie dla zawodowego matematyka nie ma problemu. Dla niego przestrzeń euklidesowa R^n jest przestrzenią wektorową n-wymiarową, lub zbiorem ciągów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liczb rzeczywistych: ta konstruktywna definicja daje natychmiast całą geometrię afiniczną, definicję prostej, płaszczyzny, zbioru wypukłego, prostą i poprawną definicję orientacji; wprowadzenie iloczynu skalarnego (definiując $x \cdot y = \sum x_p y_p$) prowadzi do pojęcia odległości i do całej geometrii klasycznej. Naprawdę jest to droga królewska.

Ale problem pedagogiczny jest bardziej złożony. Bez wątpienia pojęcie wektora jest dość silnie związane z rzeczywistością, abyśmy mogli oprzeć nasz wykład geometrii afinicznej na strukturze wektorowej płaszczyzny i przestrzeni. Nie wydaje się jednak, żeby sprawa była tak prosta z iloczynem skalarnym i odległością, szczególnie jeśli się chce uszanować przyjętą przez nas zasadę wyzwalania aksjomatów przez obserwację konkretnych sytuacji.

Aksjomatyka Euklidesa była silnie związana z konkretem, ale od czasu Hilberta wiadomo, że jest to aksjomatyka bardzo niepełna, i że usiłując ją uzupełnić (jak to zrobił Hilbert), dochodzi się do konstrukcji skomplikowanej i dość sztucznej.

Różnorakie interesujące próby były czynione w tym kierunku, żadna jednak nie dała całkowicie zadowalających wyników. Pozostała w tej dziedzinie do wykonania pasjonująca praca badawcza.

Aby nas zadowolić, dobra aksjomatyka musi zawierać małą ilość aksjomatów prostych, ale silnych, prosto wyprowadzalnych z konkretu, z których można by wyprowadzić z kolei w niewielkiej ilości kroków

interesujące wnioski, mniej intuicyjne od aksjomatów wyjściowych. Wnioski te powinny w szczególności pozwolić na szybkie spostrzeżenie struktury wektorowej przestrzeni euklidesowej i wprowadzenie iloczynu skalarnego. Wychodząc stąd można by, jeśli się chce, stosować na szeroką skalę metody geometrii analitycznej, za każdym razem, gdy mogą one uprościć lub uściślić rozumowanie typu „geometrycznego".

Wreszcie, i to jest postęp bardzo pożądany, należało by ulepszyć używany w podręcznikach i nauczaniu język matematyczny i wzbogacić go sugestywną symboliką.

Porzucić zużyte lub źle zdefiniowane słowa jak: „figura", „ciąć", „ślizgać" itd. i zastąpić je słowami nowymi jak „zbiór", „iloczyn" („część wspólna") itd.

Porzucić wyrażenia trudne do zrozumienia, nawet dla dorosłego, jak: „konieczny", „dostateczny", „potrzeba i wystarcza" na korzyść formalizmu: „A pociąga B", „B pociąga A", „A równoważne B", albo symbolicznie: $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$.

Jednym z powodów trudności, na jakie napotykają uczniowie w wysłowieniu, jest prawdopodobnie brak dobrego zrozumienia pojęć, o których każe się im mówić; taka jest sytuacja np. w przypadku pojęć odwrotności i miejsca geometrycznego. Gdybyśmy używali właściwego symbolizmu, można by te pojęcia przetłumaczyć na dostępne intuicji schematy. Ale symbolizm ten istnieje, to symbolizm teorii mnogości. Jak najwcześniej powinniśmy przyzwyczaić uczniów do znaków ϵ, $\subset$, $\frown$, $\smile$, C (przynależność, zawieranie się, iloczyn, suma, uzupełnienie), pokazać im, że w interpretacji mnogościowej koniunkcja (alternatywa) dwóch własności tłumaczy się iloczynem (sumą) zbiorów. Należało by im powiedzieć na przykład, że rozwiązać układ równań $a_i x + b_i y = c_i$ znaczy wziąć na płaszczyźnie iloczyn zbiorów X_i określonych przez te równania.

Trzeba wystrzegać się małych słówek języka potocznego: „gdy", „jakiś"; cóż pomyśleć o takim zdaniu: „Płaszczyzna jest pozioma wtedy, gdy jakaś prosta przechodząca przez dwa punkty tej płaszczyzny jest pozioma". Tylko matematyk może spróbować rozwiązać ten rebus i określić sens zakwestionowanych słówek. Dlatego też powinno się żywo polecać używanie wyłącznie *kwantyfikatorów* „dla każdego" i „istnieje" ($\forall$, $\exists$) [1], i zastanawiać się zawsze nad ich miejscem w zdaniu.

Zbadanie kilku trafnie dobranych przykładów, w których zmiana miejsca kwantyfikatora zmienia całkowicie sens zdania, będzie bardzo pouczające i usprawiedliwi te wymagania. Można na przykład porównać zdania następujące:

---

[1] W Polsce na oznaczenie tych kwantyfikatorów używa się obecnie raczej znaków $\wedge$ $\vee$, (dawne Π, Σ zaczynają znikać). *Od Redakcji.*

a) dla każdej prostej D istnieje prosta D' równoległa do D;

b) istnieje prosta D' taka, że dla każdej prostej D prosta D' jest równoległa do D;

c) istnieje prosta D' równoległa do D dla każdej prostej D.

Dwa pierwsze zdania są z punktu widzenia logiki zbudowane poprawnie, ale mają inny sens. Trzecie nie jest poprawne, ponieważ nie powinno się nigdy mówić o jakimś przedmiocie przed wprowadzeniem go (przy pomocy kwantyfikatora). W tym wypadku można je łatwo poprawić, ale tego rodzaju błąd w wypadku zdania bardziej skomplikowanego może doprowadzić po poprawie do niemożliwości jednoznacznego określenia sensu zdania. Tu zatrzymam się w podawaniu przykładów pożądanych częściowych retuszów. Retuszów tych można dokonać. Gdybyśmy umieli pracę naszą w tym kierunku prowadzić równolegle z wysiłkiem pedagogicznym, opierając nauczanie na działalności twórczej ucznia, a nie na tym, co my, nauczyciele, mamy w głowie, został by uczyniony wielki krok naprzód.