ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IV (1960)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

S. JAŚKOWSKI (Toruń)

Jak unowocześnić matematykę szkolną(*)

1. O potrzebie reformy

Postęp nauki wywiera zrozumiały wpływ na nauczanie w szkole średniej i podstawowej. W wielu dziedzinach — np. w fizyce i chemii — do programu nauczania szkolnego wchodzą elementy teorii pochodzących z ostatnich dziesiątków lat. Jest to zrozumiałe, gdyż w naukach empirycznych nowa teoria zwykle zaprzecza starszej, która nie może pozostać w programie jako jawnie fałszywa. Inaczej jest w matematyce. Nowe twierdzenie nie zaprzecza starszemu. To jest chyba główna przyczyna, dla której toleruje się konserwatyzm programu matematyki. Zapomina się o faktach powszechnie znanych, a mianowicie o tym, że rozwój matematyki jest w dużej mierze dyktowany potrzebami innych nauk, że matematycy uzyskują metody coraz ogólniejsze, bardziej ekonomiczne, lepiej dostosowane do nowych potrzeb i do nowych własnych środków aparaturowych. Nadto nie każdy wie, że ten rozwój wiąże się z istotnymi przemianami wewnętrznymi, zmieniają się definicje, te same terminy i symbole otrzymują nowe znaczenie. W rezultacie starsza teoria wymaga tłumaczenia na terminologię współczesną, aby być zrozumiałą. Często korzystniejsze jest jednak zastąpić ją przez teorię z gruntu przerobioną, nowoczesną. Zdarza się, że dwie tradycyjne teorie sprowadza się do jednej nowszej, podział matematyki ulega istotnym ewolucjom. Nawet takie wyrazy jak: arytmetyka, algebra, geometria — zmieniają swój sens. W tych warunkach nauczanie przestarzałych teorii matematycznych może się okazać nie tylko zbyteczne, lecz nawet szkodliwe, podobnie jak nauczanie przestarzałych teorii fizycznych. Systematyczna kontrola programów pod względem nowoczesności materiału jest nie mniej potrzebna w matematyce, niż w innych przedmiotach. Obecnie problem bardziej lub mniej radykalnej reformy programu matematyki jest wysuwany w wielu krajach, żeby nie rzec — we wszystkich. Uwagi poniższe dotyczą nauczania matematyki w Polsce.

Każda zmiana rzeczowego zakresu programu wiąże się z problemem

(*) Artykuł ten zamieszczamy jako dyskusyjny (*Redakcja*).

znalezienia odpowiednio przystępnej metody wykładu nowego materiału. Problem ten nie leży wyłącznie w dziedzinie metodyki nauczania wraz z jej ogólną podbudową w postaci pedagogiki ogólnej, psychologii itd. Dążenie do prostoty i przejrzystości jest widoczne przy budowie nowych teorii matematycznych, a logika matematyczna dostarcza odpowiednich środków po temu. Ten fakt pozwala oczekiwać, że modernizacja wykładu matematycznego będzie szła w parze z jego logicznym i metodycznym udoskonaleniem. Podobnie jak inne nauki, matematyka w miarę swego rozrostu dzieli się na coraz węższe specjalności. Na to, by uzyskać pogląd ogólny na tę naukę, należy opanować najważniejsze, starannie dobrane elementy poszczególnych teorii. Na przykładzie matematyki uniwersyteckiej można zaobserwować, jak nauczanie matematyki staje się coraz bardziej teoretyczne, opisowe. Student nie opanowuje metod numerycznego rozwiązywania wielu typów równań, dla których zna teoretyczne metody rozwiązywania. Rozwiązywanie numeryczne pozostawia się specjalistom, uzbrojonym w odpowiednie tablice i maszyny. Ze stale wzrastającym teoretycznym charakterem matematyki należy się pogodzić i dać mu właściwy wyraz w nauczaniu szkolnym. Poznanie subtelnych, niezmiernie pożytecznych pojęć matematycznych, które występują np. w analizie, daje większe korzyści niż praktyczne opanowanie metod rachunkowych.

Nie można dać ostatecznej odpowiedzi na pytanie, czy nowy materiał daje się wyłożyć w sposób przystępny dla ucznia, bez opracowania próbnych podręczników i bez prób realizacji nauczania według tych podręczników w eksperymentalnych szkołach. Nie można przemilczeć ważnego czynnika utrudniającego postęp w tym kierunku, mianowicie braku przygotowania nauczycieli do zmienionego programu. Jeżeli ten ostatni czynnik okazałby się decydujący, należy rozpocząć od gruntownej reformy w zakresie kształcenia przyszłych nauczycieli.

2. Logiczna strona wykładu matematyki w szkole

Powszechnie przyjęty jest pogląd, że matematyka składa się z teorii dedukcyjnych. Nie wynika stąd, aby wykład matematyki mógł mieć czysto dedukcyjny charakter. Rozważań na temat teorii dedukcyjnej nie ogranicza się dzisiaj do dedukcji prowadzonej w języku samej teorii. Z teorią dedukcyjną T jest związany metasystem teorii T, obejmujący zdania wypowiadane o teorii T, jednak nie dające się wysłowić w języku badanej teorii T. Do metasystemu należą m. in. problemy semantyczne, dotyczące możliwych znaczeń występujących w teorii T terminów, problemy takie występują przy omawianiu modeli teorii T. Modelem teorii T jest dowolny zbiór przedmiotów M, w którym są określone relacje i działania teorii T i w którym twierdzenia teorii T są spełnione. Może się zda-

rzyć, że w zbiorze M są określone relacje i działania również innej teorii S i że M jest wspólnym modelem obu teorii T i S. Szczególnie ważny jest przypadek, w którym teoria T posiada interpretację w teorii S, tzn. wtedy, gdy w teorii S można zdefiniować relacje i działania analogiczne do relacji i działań teorii T i gdy można w S dowieść twierdzeń analogicznych do twierdzeń teorii T. Wówczas każdy model teorii S jest zarazem modelem teorii T zgodnie z interpretacją. Metodyczne znaczenie interpretacji polega na tym, że pozwala ona utożsamiać pojęcia, które powstały niezależnie od siebie w historycznym rozwoju matematyki. W ten sposób ogranicza się ilość pojęć w myśl znanej zasady Ockhama: nie mnożyć bytów ponad potrzebę!

Najważniejszym modelem dla geometrii euklidesowej jest przestrzeń fizyczna. Ściśle rzecz biorąc, wypowiedź głosząca, że geometria euklidesowa posiada znany model w świecie materialnym, należy do praw fizyki i nie posiada wyższego stopnia pewności, niż inne prawa fizyczne. Jest tylko silnie potwierdzaną hipotezą. Kwestia, czy nauczanie tego prawa zaliczyć do fizyki, czy do matematyki, jest sprawą organizacyjną. Zgodnie z tradycją zaliczamy je do matematyki, która w swoim poglądowym etapie jest poświęcona m. in. nauczaniu pewnej teorii fizycznej. Nie widać powodu, dla którego ten stan rzeczy należałoby zmieniać, należy tylko uświadomić sobie empiryczny charakter początkowego nauczania matematyki i stosować metody właściwe dla wykładu teorii empirycznych. Nie będę tu wnikał w dość skomplikowany problem pojęć pierwotnych i definicji w takiej teorii, zwrócę tylko uwagę, że lepiej tam mówić o prawach jak w fizyce, a nie o twierdzeniach czy pewnikach i że nie ma możności przeprowadzania dowodu w tym sensie, w jakim tego wyrazu używamy we właściwym nauczaniu matematyki. Zasadniczy schemat początkowego wykładu teorii matematycznej wygląda więc tak: (1) poglądowa definicja modelu dla danej teorii i empiryczne potwierdzenie pewnych podstawowych praw, które w stadium (2) zostają przyjęte za aksjomaty teorii. Dalszy tok dowodu jest w zasadzie dedukcyjny; w razie metodycznie uzasadnionego odstępstwa od dedukcyjnego toku wykładu należy słuchaczowi zakomunikować o możliwości przeprowadzenia ścisłego dowodu dedukcyjnego.

Nauczanie matematyki powinno być praktyczną szkołą logiki. Ważnym zadaniem jest wpoić w ucznia umiejętność poprawnego używania spójników międzyzdaniowych, zmiennych liczbowych i innych, a także kwantyfikatorów. W najwyższej klasie należy umieścić krótki zarys logiki matematycznej, w którym omówi się znane już praktycznie funkcje logiczne, budowę teorii dedukcyjnej, pojęcie modelu i spełniania. Do wyjaśnień na ten temat należy dołączyć wiadomości o kilku pojęciach z teorii mnogości.

Podany wyżej schemat wykładu teorii dedukcyjnej stosuje się do arytmetyki liczb naturalnych z pewnym uproszczeniem, gdyż do ugruntowania arytmetyki liczb naturalnych wystarczą tautologie logiczne i pewnik nieskończoności głoszący, że istnieje nieskończenie wiele indywiduów (aksjomat Russela). Stadium wykładu empirycznego jest więc szczególnie proste. Stosowana obecnie metoda nauczania początków arytmetyki na konkretach jest poprawną realizacją poglądową logicznej definicji liczby naturalnej. Aksjomatykę Peanowską arytmetyki liczb naturalnych warto podać, oczywiście znacznie później.

Co to jest matematyka elementarna? Na ogół matematykę elementarną rozumie się w pewien tradycyjny sposób, dość trudny do sprecyzowania, istotną bowiem rolę grają tu względy historyczne. Chyba najdokładniej wiadomo, co rozumieć tradycyjnie przez geometrię elementarną. Chodzi tu o określoną metodę wykładu, wywodzącą się w zasadzie od Euklidesa. Geometrii elementarnej obce są metody analityczne, a także pojęcie wektora. Na ogół uważa się, że w szkole należy uczyć matematyki elementarnej, a matematykę wyższą pozostawić wyższym uczelniom. Ścisłą definicję zdania elementarnego i teorii elementarnej znajdujemy w logice matematycznej. Elementarnym nazywamy każde zdanie, w którym nie występują inne zmienne niż elementarne, reprezentujące indywidua, tj. przedmioty najniższego typu logicznego. W teorii elementarnej występują tylko zdania elementarne. Tego znaczenia terminu „elementarny" będę się trzymał w dalszym ciągu. Aksjomat ciągłości w geometrii i aksjomat indukcji zupełnej w arytmetyce liczb naturalnych nie są zdaniami elementarnymi. A więc zakres matematyki szkolnej krzyżuje się z zakresem teorii elementarnych, lecz zdania nieelementarne są wyjątkami w obecnym nauczaniu szkolnym. Natomiast analiza matematyczna jest wyraźnie nieelementarna, gdyż zawiera zmienne funkcyjne, które reprezentują twory typu wyższego niż liczba. Metody wykładu analizy uległy w ciągu ostatnich 150 lat znacznemu uproszczeniu logicznemu i udoskonaleniom natury dydaktycznej, wiek XX przyniósł dalszy postęp w tej mierze. Obecnie analiza stanowi prostą i naturalną nadbudowę nad arytmetyką liczb rzeczywistych. Przytoczone fakty przemawiają za tym, że do nauczania szkolnego można włączyć większą ilość materiału nieelementarnego, w szczególności zaś analizę, bez obawy nadmiernego skomplikowania wykładu.

3. Podstawy geometrii i arytmetyki liczb rzeczywistych

Klein ([6], str. 207-208) zauważył, że starożytni w istocie znali liczby rzeczywiste dodatnie. Powszechne przeciwne mniemanie wypływa z tej okoliczności, że liczby rzeczywiste starożytnych zostały nam przekazane

pod nazwą stosunków geometrycznych, a duży fragment arytmetyki tych liczb — pod nazwą teorii proporcji. Interpretację arytmetyki liczb rzeczywistych w geometrii zrealizował w sposób ścisły Hilbert ([4], rozdział III) w postaci tzw. rachunku odcinków. Tak powstała geometryczna teoria liczb rzeczywistych. Z drugiej strony, dobrze znana jest interpretacja geometrii w arytmetyce liczb rzeczywistych, tę interpretację określa się w geometrii analitycznej. W rezultacie wzajemnej interpretowalności arytmetyka liczb rzeczywistych i geometria euklidesowa są formalnie różnymi systemami tej samej teorii: pojęcia pierwotne jednego systemu są pojęciami zdefiniowanymi w drugim i aksjomaty jednego systemu są twierdzeniami drugiego. Ten wynik ma zasadnicze znaczenie przy klasyfikowaniu matematyki. Nie ma potrzeby oddzielać geometrię euklidesową od arytmetyki liczb rzeczywistych w jakiś sposób zasadniczy, podział taki przeprowadza się tylko ze względu na odmienne metody stosowane w obu działach, a wzajemne przenikanie geometrii do arytmetyki (tzw. ilustracja geometryczna czy graficzna) i na odwrót mają głębokie przyczyny teoretyczne i nie są tylko chwytami dydaktycznymi.

Proponuję więc następującą kolejność wykładu: (1a) poglądowy wykład początków geometrii, (1b) geometryczna teoria liczb rzeczywistych w wykładzie poglądowym łącznie ze sformułowaniem praw, które przyjęte będą później za aksjomaty arytmetyki liczb rzeczywistych, (2a) arytmetyka liczb rzeczywistych doprowadzona m. in. do (2b) zdefiniowania modelu kartezjańskiego dla geometrii. Etapy (1a-b) są poglądowym budowaniem modelu dla arytmetyki liczb rzeczywistych, (2a-b) mogą być wykładane w sposób bardziej systematyczny. Aksjomatyka geometrii staje się wówczas zbędna. Wprawdzie arytmetyka liczb rzeczywistych posiada dość długi układ aksjomatów, ale — z wyjątkiem nieelementarnego aksjomatu ciągłości — są to aksjomaty krótkie, o bardzo prostej budowie. Należałoby dołączyć do nich aksjomaty Peano arytmetyki liczb naturalnych. Już Tarski ([10], str. 7) podkreślał, że arytmetyka lepiej nadaje się do wykładu dedukcyjnego, niż geometria, której aksjomaty są często bardziej skomplikowane od twierdzeń i mniej oczywiste. Ponadto nieraz rysunek ilustrujący w oczywisty sposób twierdzenie utrudnia dedukcyjny tok wykładu geometrii. Krytyczny pogląd na dedukcyjny wykład geometrii posiada licznych zwolenników (por. Bielecki [1], Krygowska [7]). Za przyjęciem proponowanej tu metody wykładu przemawiają dalsze jeszcze względy. Geometryczna teoria liczb rzeczywistych nawiązuje do prostego materiału geometrycznego, dającego wyłożyć się w sposób poglądowy. Teoria ta pozwala uniknąć pojęcia liczby wymiernej jako pośredniego ogniwa przy definiowaniu liczby rzeczywistej. Wprowadzanie ułamków na gruncie ich zastosowań geometrycznych ma zwolenników w naszej literaturze, tę metodę polecał Chwistek

([2], str. 47-49) z powołaniem na S. Zarembę. Przy użyciu definicji geometrycznej liczby wymierne i niewymierne są wprowadzane w sposób jednolity. Uważam za możliwe, by pójść jeszcze dalej w tym kierunku i w nauczaniu szkolnym podać taką postać geometrycznej teorii liczb rzeczywistych, aby ujednolicić wykład liczb rzeczywistych dodatnich i ujemnych. W tym celu korzystne będzie wprowadzić rachunek wektorów zamiast klasycznego rachunku odcinków Hilberta. Pojęcie wektora jest znane uczniowi z lekcji fizyki już w klasie VI szkoły podstawowej.

Celem wektorowego sformułowania geometrycznej teorii liczb wystarczy zdefiniować dodawanie wektorów o wspólnym początku i zgodnych lub przeciwnych kierunkach. Następnie definiuje się naturalne, a także wymierne wielokrotności wektora, co pozwala wypowiedzieć twierdzenie Talesa w prosty sposób. Wielokrotności naturalne wektora r oznaczamy: $2r$, $3r$ itd. Zgodnie z terminologią przyjętą w nauczaniu początkowym będziemy mówili, że r jest tu mianem. Nie trudno zrozumieć, co to jest $\frac{1}{2}r$, $\frac{3}{2}r$ itd., a także $-r$, $-2r$, $-\frac{1}{2}r$. Liczba rzeczywista posiada więc typ logiczny funkcji mającej argument i wartość typu wektora; funkcje takie nazwijmy przekształceniami wektora. Liczbę rzeczywistą można zdefiniować jako takie przekształcenie T wektora r w wektor Tr, że (1) wektor Tr jest współliniowy z wektorem r i ma wspólny początek z wektorem r, (2) dla zerowego wektora r wektor Tr jest zerowy, (3) przekształcenie jest niezmiennicze względem rzutów równoległych. Oczywiście warunek (3) można sformułować bardziej przystępnie, znajomość twierdzenia Talesa będzie tu pomocna. Jak widać, podana tu definicja operuje pojęciami afinicznymi, nie metrycznymi. W istocie, wykorzystujemy tu fakt, że uporządkowana trójka punktów współliniowych (początek obu wektorów, koniec wektora r, koniec wektora Tr), wśród których dwa pierwsze są różne, posiada w geometrii afinicznej jeden niezmiennik, przyjmujący wszystkie liczby rzeczywiste jako wartości. Definicje działań na liczbach rzeczywistych i definicja relacji mniejszości nie nastręczają trudności zasadniczych. Podstawowe własności działań dają się prosto sformułować, podczas gdy ich geometryczne odpowiedniki (twierdzenie Pascala) są dość skomplikowane. W wykładzie początkowym własności te można uzasadnić opierając się na prawie Talesa i na poglądowej obserwacji. Aksjomat ciągłości należy wprowadzić wtedy, gdy będzie on potrzebny. Sądzę, że korzystnie będzie wtedy zdefiniować kres górny i dolny zbioru liczb i wypowiedzieć aksjomat ciągłości jako aksjomat istnienia kresu. Pojęcie kresu jest przydatne do wielu celów jak definiowanie pola figury krzywoliniowej, ułamka dziesiętnego nieskończonego.

Jak mogliśmy zauważyć, geometryczna definicja liczby rzeczywistej nie jest elementarna, co więcej, liczba rzeczywista jest zdefiniowana w dość wysokim typie logicznym. Na to nie ma rady, gdyż wszystkie

definicje liczby są nieelementarne — łącznie z logiczną definicją liczby naturalnej. Pojęcia nieelementarne leżą u podstaw arytmetyki i dają się wyłożyć w sposób poglądowy.

4. Algebra

W tradycji programowej uważa się wprowadzenie liczb ujemnych i zmiennych liczbowych za przejście od arytmetyki do algebry. Dziś trudno jest zgodzić się z taką nomenklaturą. Można przecież mówić o arytmetyce liczb całkowitych względnych, o arytmetyce liczb rzeczywistych lub o arytmetyce liczb zespolonych. Zmienne liczbowe występują zarówno w arytmetyce, jak i w analizie, nie są bynajmniej charakterystyczne dla algebry. Charakterystyczna dla algebry jest ogólność rozważań. Przedmiotem tych rozważań są grupy, pierścienie, ciała — ogólnie mówiąc: algebry [1] — tj. zbiory przedmiotów, w których są określone działania i relacje o ustalonych własnościach. Do prehistorii algebry wypada zaliczyć datujące się od Euklidesa ogólne wypowiedzi na temat „wielkości", które można dodawać, porównywać. Zbiór jednego rodzaju wielkości, to półgrupa uporządkowana.

Zbiory liczb naturalnych, całkowitych, rzeczywistych itd. są przykładami algebr. Jednak metody użyte w arytmetyce są odmienne od właściwych metod algebraicznych. W programie algebry szkolnej znajdujemy jeden temat, w którym wykraczamy poza arytmetykę liczbową i co więcej, stosujemy dość subtelną metodę algebraiczną. Mianowicie ułamki algebraiczne traktuje się jako nowe ciało, w którym wielomiany tworzą pierścień elementów całkowitych. Czyni się tak, aby uzasadnić skracanie ułamków algebraicznych i dzielenie wielomianów bez reszty, np. w myśl wzoru

$$(1) \qquad (x^2-1):(x-1) = x+1.$$

Jeżeli znaki działań rozumieć jako znaki działań na liczbach, to wzór nie posiada sensu w przypadku $x = 1$. Jednak wzór (1) zachowuje bezwarunkową ważność, skoro działania — w szczególności dzielenie — rozumieć jako działania w ciele ułamków algebraicznych. Takie stanowisko jest w zasadzie (chociaż nie zupełnie konsekwentnie) przyjęte w podręcznikach szkolnych. Ułamki algebraiczne i wielomiany traktuje się jako napisy, a więc przedmioty z metasystemu i odpowiednio rozumie się znaki działań. Trudniej natomiast powiedzieć, co znaczy znak równości,

[1] Termin „algebra" nie jest tu ogólnie przyjęty, w tym samym znaczeniu używa się też terminu „model" lub — w języku francuskim — za Bourbakim terminu „struktura", chociaż ten ostatni ma w polskiej terminologii znaczenie francuskiego „treillis".

gdyż równość nie jest tożsamością kształtu wyrażeń. Elementami ciała nie są same napisy, lecz chyba klasy napisów wzajemnie równych (klasy abstraktów ze względu na kongruencję oznaczaną znakiem równości). W rezultacie ta koncepcja definiowania działań na wielomianach i ułamkach algebraicznych, odpowiednia na wyższym stadium nauczania, jest dość skomplikowana i trudna do konsekwentnego przeprowadzenia, a bynajmniej nie wydaje się ani niezbędna, ani celowa w szkole.

Sądzę, że względy praktyczne przemawiają za przeniesieniem materiału z tzw. w szkole algebry do arytmetyki liczb rzeczywistych ze zmiennymi liczbowymi. Te same względy przemawiają za tym, aby zmienne wprowadzić bardzo wcześnie. Zwłaszcza literowe oznaczenie niewiadomych przyczynia się do ułatwienia rozwiązywania zadań tekstowych. We wzorach ogólnych należy zmienną pozbawić tajemniczego charakteru liczby ogólnej i stale zaznaczać słownie jej właściwą rolę — przy pomocy kwantyfikatorów. Twierdzenia mające postać wzoru są łatwiejsze do zrozumienia w postaci pełnej, np. „dla wszystkich liczb x, y jest prawdą, że $x+y = y+x$". Pozostawienie kwantyfikatorów domyślności ucznia nie ułatwia mu zadania. Różnica między równością, a równaniem stanie się bardziej wyraźna, gdy opatrzymy równania pytaniem, np. „dla jakich liczb x, y jednocześnie $x+y = 15$ i $x-y = 7$?" Duża część dotychczasowego materiału z zakresu algebry przejdzie do arytmetyki bez żadnych trudności. Trudności występują dopiero przy rozważaniu ułamków algebraicznych, których mianowniki mogą być równe zeru. Nie dla wszystkich x wzór (1) jest prawdziwy w arytmetyce. Ten przypadek należy wyraźnie wykluczyć poprzedzając wzór (1) odpowiednim warunkiem lub też zaznaczając w sposób ogólny, że takie warunki — domyślne — są potrzebne zawsze wtedy, gdy mamy do czynienia z dzieleniem. Zresztą uwagi na ten temat są niezbędne przy każdej metodzie wykładu. Ale omówienie problemu wyrażeń nieoznaczonych w sposób dający korzyści praktyczne jest możliwe dopiero wtedy, gdy mamy do dyspozycji tak podstawowe pojęcie analizy, jakim jest granica funkcji. I to jest zasadnicza przyczyna, dla której należy wcześnie rozpocząć propedeutyczny wykład analizy.

Z programu można skreślić bez szkody następujące pozycje zaliczane dotychczas do algebry: 1) obliczanie liczbowe pierwiastka kwadratowego, które lepiej jest wykonywać przy pomocy logarytmowania w przypadkach skomplikowanych, a przy pomocy zwykłych tablic pierwiastków w przypadkach prostszych, 2) równania wyższych stopni, rozwiązywane przy pomocy pierwiastników, podczas gdy właściwsza będzie informacja na temat rozwiązań przybliżonych w toku nauczania analizy. Teoria logarytmów nie należy do algebry, lecz do analizy i należy zerwać z powszechną w programie nieścisłością w tej mierze. Logarytm jest bowiem funkcją przestępną, a nie algebraiczną.

Co więc wykładać w szkole pod nazwą algebry? Sądzę, że pewne elementy algebry należy podać w klasie najwyższej, a mianowicie omówić ciało liczb zespolonych i podać przykłady teorii algebraicznych i ich modeli w związku z elementami logiki matematycznej. Modelem dla arytmetyki liczb zespolonych jest pewna grupa przekształceń wektora w wektor na płaszczyźnie, liczbę $r \cdot e^{it}$ interpretuje się jako r-krotne powiększenie wektora i obrót o kąt t. W ten sposób uzyskujemy interpretację liczby zespolonej w tym samym typie logicznym, co dla liczby rzeczywistej. Mimo pożytku płynącego z pewnych wiadomości o liczbach zespolonych nie sądzę, by warto poświęcać czas na wyrobienie wysokiej sprawności rachunkowej ucznia w tym zakresie, a to tym bardziej, że rozwój matematyki szedł ostatnio w dużej mierze w kierunku teorii funkcji zmiennej rzeczywistej.

Pewne wiadomości z zakresu kombinatoryki zasługują na podanie, zwłaszcza jeżeli znajdzie się później czas na elementy teorii prawdopodobieństwa. W tym ostatnim zakresie korzystne byłoby sformułowanie wzoru dwumiennego na prawdopodobieństwo powtórzeń, podana bez dowodu informacja o granicznym rozkładzie Gaussa, a także prawo wielkich liczb w jakiejś prostej postaci.

5. Geometria i trygonometria

Włączenie nowego materiału do programu wymaga dokonania skreśleń w materiale dotychczasowym. Jako pole do skreśleń wysuwa się na pierwszy plan geometria elementarna. Jest to wykład w założeniu dedukcyjny, chociaż trudności dowodowe i względy metodyczne uniemożliwiają realizację tego założenia. Czystość metody wymaga, aby wykład był prowadzony niezależnie od arytmetyki, ale i tej zasady nie przestrzega się konsekwentnie. Do geometrii elementarnej zalicza się oczywiste w świetle obserwacji twierdzenie głoszące, że naprzeciw większego boku w trójkącie leży większy kąt, natomiast ciekawsze twierdzenie ujmujące tę zależność liczbowo w postaci prawa sinusów zalicza się do trygonometrii. Izolacja geometrii od arytmetyki i trygonometrii okazuje się nieuzasadniona, jeżeli wziąć pod uwagę omówioną poprzednio wzajemną interpretowalność arytmetyki i geometrii. Nasuwa się natomiast postulat włączenia początków trygonometrii do wczesnego nauczania geometrii, choćby w wyższych klasach szkoły podstawowej.

Wąski zakres tematyki geometrii elementarnej budzi poważne zastrzeżenia. Jest to geometria prostych i okręgów, użyte w niej metody nie są przystosowane do badania innych krzywych. Tymczasem nauki przyrodnicze, technika, nawet sztuka operują wielkim bogactwem krzywych. Niektóre z tych krzywych należy choćby pobieżnie omówić w kur-

sie szkolnym na lekcjach poświęconych geometrii. Zasługują na to stożkowe, sinusoida, krzywa logarytmiczna. W pewnej mierze czyni się to obecnie poza geometrią, co nadaje geometrii elementarnej charakter ubogi i wykazuje jej nieudolność wobec problemów geometrycznych. Natomiast tradycyjnie utrzymuje się w geometrii szereg tematów, może interesujących, ale jałowych, nie mających zastosowań ani w matematyce wyższej, ani w fizyce i kwalifikujących się tylko do skreślenia i zastąpienia pozycjami bardziej płodnymi i wartościowymi. Można opuścić wiele szczegółów z geometrii trójkąta nawet takie klasyczne pojęcia, jak środkowa i środek ciężkości, zresztą ten ostatni podawany jest bez nawiązania do fizycznego sensu tego pojęcia. Oczywiste fakty dotyczące przecinania prostej z okręgiem są wyolbrzymione. Zbytnio rozbudowane są twierdzenia dotyczące okręgów wpisanych i opisanych na trójkątach, a całkiem zbyteczne są twierdzenia o wpisywaniu i opisywaniu okręgów w czworokąty i na czworokątach. Można pominąć pewne konstrukcje cyrklowe.

Co ma pozostać i co nowego włączyć do nauczania geometrii? Jak już mówiłem, początkowy wykład geometrii elementarnej będzie miał na celu m. in. ugruntować geometryczną teorię liczb i uzasadnić podstawowe definicje geometrii analitycznej. Do osiągnięcia tego celu potrzebne są twierdzenia Talesa i Pitagorasa. Przy wykładzie geometrii analitycznej należy wskazać na korzyści uzyskane dzięki sprowadzaniu dowodów geometrycznych do rachunku i dzięki wykorzystaniu metod graficznych do rozwiązywania układów równań. Warto za Markuszewiczem [8] wprowadzić pojęcie „trapezoidu krzywoliniowego", tj. zbioru punktów spełniających nierówności $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ dla pewnej funkcji f dodatniej, ciągłej w przedziale $\langle a, b\rangle$. Jeżeli przyjmiemy $f(x) = 1/x$ w przedziale $(1, t)$, to pole trapezoidu jest logarytmem naturalnym liczby t. Jest to znany w analizie sposób definiowania logarytmu, użyty m. in. przez Couranta ([3], str. 25, 167). Dzięki tej definicji logarytm naturalny jest funkcją o przejrzystym znaczeniu geometrycznym, podobnie jak funkcje trygonometryczne. Przy pomocy logarytmu naturalnego można zdefiniować logarytm dziesiętny, funkcję wykładniczą, potęgowanie o wykładniku rzeczywistym. Związek między pierwiastkowaniem a podnoszeniem do potęgi $1/n$ daje się łatwo udowodnić, nie ma więc potrzeby definiować potęgę o wykładniku rzeczywistym w kilku etapach tak, jak to się czyni obecnie.

W programie dzisiejszym podaje się uczniom jeden tylko rodzaj przekształceń nieizometrycznych, mianowicie podobieństwa. Przy projektowanych zmianach niezbędne stanie się powinowactwo osiowe prostopadłe, mające zastosowanie zarówno w teorii elipsy, jak i w dowodzie twierdzenia o logarytmie iloczynu. Geometria analityczna wiąże się

z analizą. Ten związek należy w wykładzie uwzględnić w wysokim stopniu, nie izolując się od metod analizy tam, gdzie one są pożyteczne, np. przy omawianiu stycznej.

6. Analiza

Analizę matematyczną otrzymuje się przez dołączenie zmiennych wyższych typów (funkcji i zbioru) do arytmetyki liczb rzeczywistych. Pojęcia analizy matematycznej mają podstawowe znaczenie dla zrozumienia praw fizyki i techniki. Bez ich pomocy nie można prawidłowo zdefiniować tak zasadniczych pojęć fizycznych, jak prędkość i przyśpieszenie. W węższym lub szerszym zakresie są wykładane w szkołach średnich wszystkich krajów. Mają jednak opinię trudnych nawet w początkach nauczania uniwersyteckiego, tak że problem metodycznego opracowania wykładu ma w tym przypadku pierwszorzędne znaczenie. Aby umożliwić umieszczenie rachunku różniczkowego i całkowego, warto jest dokonać w programie skreśleń niektórych mniej ważnych pozycji, a materiał klas niższych dobierać w ten sposób, by dostarczał przygotowania do kursu analizy. Chodzi mi tu o poprzednio już wspominane elementy programowe, jak wczesne oswojenie ucznia z kwantyfikatorami i pewne tematy z geometrii, która dostarczy poglądowych ilustracji dla analizy.

Fundamentem analizy są pojęcia graniczne. W wykładzie uniwersyteckim w definicji granicy ciągu lub funkcji używa się uświęconych tradycją oznaczeń dla zmiennych występujących pod kwantyfikatorami. Mówi się nawet o definicjach „epsilonowych". Ułatwienia metodyczne można osiągnąć przez przeanalizowanie pojęć pomocniczych i wybór pewnych terminów charakteryzujących rolę zmiennych w definicji. Znane są uogólnione kwantyfikatory „dla prawie wszystkich n", „dla wielkich n". Pożyteczny może być termin „liczba progowa" (Peter [9], str. 185). W definicji granicy ciągu a_n zbieżnego do liczby a liczbą progową dla danej liczby dodatniej ε nazywa się każdą taką liczbę s, że dla każdego wskaźnika n większego od s zachodzi $|a_n - a| < \varepsilon$. Przy definiowaniu ciągłości funkcji należy zdecydować się na jedną z dwóch klasycznych definicji: Heinego lub Cauchy'ego. Pierwsza daje łatwiejsze dowody twierdzeń o ciągłości sumy i iloczynu funkcji ciągłych, jeżeli mamy twierdzenia o granicy sumy i iloczynu ciągów. W definicji Heinego nie mamy zbiegu kwantyfikatorów. Jednak jedyny kwantyfikator „przy wszelkim ciągu x_n" wiąże zmienną wysokiego typu logicznego, a nie typu liczby. Ponadto z definicji Heinego nie wynika w sposób łatwy ta własność funkcji ciągłych, która jest podstawą do sformułowania definicji Cauchy'ego. Z tych względów raczej definicja Cauchy'ego byłaby korzystniejsza. Przed sformułowaniem tej definicji należy wskazać na znaczenie

rozważań, w których występują małe przyrosty argumentu i funkcji. Takie rozważania znajdujemy w teorii błędów, która posiada duże znaczenie kształcące niezależnie od swej roli przygotowawczej dla analizy, a która jest dobrym zastosowaniem teorii nierówności i znaku wartości bezwzględnej. Pożytecznymi będą pojęcia błędu, błędu względnego, granicy błędów (tolerancji) i twierdzenia o błędzie sumy i błędzie względnym iloczynu. Te ostatnie prowadzą do twierdzeń o ciągłości sumy i iloczynu funkcji ciągłych, a także do wzorów na pochodną sumy i iloczynu funkcji o znanych pochodnych. Jako wstęp do ścisłej definicji ciągłości funkcji w sensie Cauchy'ego należy przerobić rozwiązywanie nierówności wprowadzając pojęcie częściowego rozwiązania. W definicji ciągłości funkcji f w punkcie x_0 wypowiada się warunek, że dla każdego dodatniego t nierówność $|f(x)-f(x_0)| < t$ posiada częściowe rozwiązanie postaci $|x-x_0| < s$. Po omówieniu pewnych własności funkcji ciągłej można zdefiniować granicę funkcji f przy x zmierzającym do punktu x_0, w którym f nie jest określona, jako wartość w x_0 funkcji będącej ciągłym rozszerzeniem dla f. Ta definicja wystarcza do omówienia najważniejszego przypadku granicy ilorazu o liczniku i mianowniku zmierzających do zera, a także do zdefiniowania pochodnej.

Pojęcia graniczne należy zdefiniować tak wcześnie, aby jeszcze w toku nauczania szkolnego można było z nich korzystać. W szczególności należy poprawnie wyprowadzać wzór na objętość stożka — jako granicę ciągu objętości przybliżonych. Bezpośrednio po zdefiniowaniu granicy funkcji należy podać definicję pochodnej, jako najważniejsze praktycznie zastosowanie granicy. Sądzę, że te definicje winny znaleźć miejsce na początku przedostatniej klasy, a może jeszcze wcześniej. Pochodna dostarcza wtedy teoretycznego uzasadnienia dla interpolacji, stosowanej obecnie praktycznie przy odczytywaniu tablic logarytmicznych bez teoretycznego ugruntowania. Przy pierwszym omawianiu pochodnej wystarczy ograniczyć się do najprostszych przykładów obliczania. W dalszym kursie warto byłoby wyrobić pewną sprawność ucznia w różniczkowaniu w dość wąskim zakresie. Jako zastosowania rachunku różniczkowego nasuwa się obliczanie ekstremów. Sądzę, że pożyteczne byłoby ilustrowanie wykładu przykładami zastosowań fizycznych, a nawet wskazanie na przykłady, w których rozważania fizyczne prowadzą do równań różniczkowych.

Z uwagi na trudności rachunkowe związane z całkowaniem, rachunek całkowy należy ująć jeszcze bardziej teoretycznie, niż różniczkowy. Pojęcie pola figury krzywoliniowej, pojęcie trapezoidu krzywoliniowego dostarcza przygotowania do geometrycznej definicji całki oznaczonej. Teoria logarytmu naturalnego jest tu dobrą ilustracją. Należy więc rachunek całkowy rozpocząć od całki oznaczonej. Dowód różniczkowalności

funkcji określonej za pomocą całki $\int_a^x f(t)dt$ nie przedstawia trudności. W dalszym ciągu należy zdefiniować całkę nieoznaczoną i podać przykłady metod jej obliczania.

Prace cytowane

[1] A. Bielecki, *Programy szkolne matematyki na tle współczesnych poglądów na jej strukturę logiczną*, Matematyka, r. 12 (1959), nr 1-2, str. 3-11.

[2] L. Chwistek, *Granice nauki*, Lwów-Warszawa (bez daty).

[3] R. Courant, *Differential and integral calculus*, Vol. 1, London-Glasgow 1937.

[4] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig-Berlin 1930.

[5] S. Jaśkowski, *Problem modernizacji materiału programowego matematyki w szkołach ogólnokształcących*, Matematyka, r. 12 (1959), nr 1-2, str. 46-55.

[6] F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Bd. 2: *Geometrie*, Berlin 1925.

[7] Z. Krygowska, *Analiza zasad i konstrukcji obecnego programu matematyki z punktu widzenia zgodności z zasadami współczesnej metodologii matematyki*, Matematyka, r. 12 (1959), nr 1-2, str. 11-24.

[8] A. I. Markuszewicz, *Pola i logarytmy*, Warszawa 1956.

[9] R. Péter, *Rekursive Funktionen*, Budapest 1951.

[10] A. Tarski, *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*, Biblioteczka Matematyczna nr 3-4-5, Lwów-Warszawa (bez daty).