ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IV (1960)

wmptm 1897

J. MIKUSIŃSKI (Katowice)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Trygonometria równania różniczkowego $x^{(4)}+x=0$ (*)

1. Rozwiązania podstawowe. Równanie

$$x^{(4)}+x=0 \tag{1}$$

rozwiązujemy podstawiając $x=e^{at}$. Wtedy dla a dostajemy warunek

$$a^4+1=0,$$

z którego wynika, że a musi być równe jednej z liczb

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i).$$

Stąd mamy cztery rozwiązania równania (1)

$$e^{(1+i)t/\sqrt{2}}, \quad e^{(1-i)t/\sqrt{2}}, \quad e^{(-1+i)t/\sqrt{2}}, \quad e^{(-1-i)t/\sqrt{2}}.$$

Średnia arytmetyczna $C(t)$ tych rozwiązań jest także rozwiązaniem równania (1). Łatwo sprawdzić, że

$$C(t)=\cosh\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, \tag{2}$$

gdzie cosh oznacza funkcję cosinus hiperbolicus. Także pochodne

$$C'(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sinh\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}-\cosh\frac{t}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

$$C''(t)=-\sinh\frac{t}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}},$$

$$C'''(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sinh\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}+\cosh\frac{t}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

(*) Artykuł ten stanowi analogię do dawniej opublikowanego artykułu *Trygonometria równania różniczkowego* $x'''+x=0$ (Wiadomości Matematyczne 2 (1959), str. 207-227), stanowi jednak sam dla siebie niezależną całość.

spełniają równanie (1). Wprowadzając oznaczenie

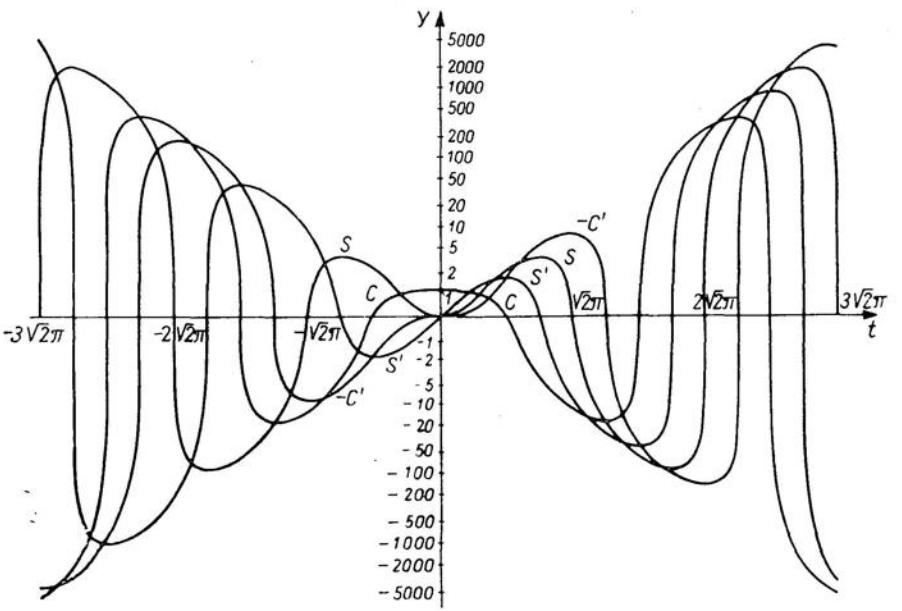
$$S(t) = \sinh\frac{t}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}, \tag{3}$$

mamy

$$C''(t) = -S(t) \quad \text{i} \quad S''(t) = C(t).$$

We wzorach tych druga pochodna gra taką samą rolę jak pierwsza pochodna w analogicznych wzorach dla funkcyj trygonometrycznych sinus i cosinus.

Z (2) i (3) wynika, że obie funkcje $C(t)$ i $S(t)$ są parzyste. Pochodne $C'(t)$ i $S'(t)$ są nieparzyste. Wykresy wszystkich czterech funkcyj $C(t)$, $C'(t)$, $S(t)$ i $S'(t)$ podajemy na rysunku 1.



Rys. 1

2. Twierdzenie o istnieniu i jedyności. Z ogólnej teorii równań różniczkowych wiadomo, że zachodzi następujące

TWIERDZENIE I. *Dla dowolnie danych liczb* k_0, k_1, k_2 *i* k_3 *istnieje jedno i jedyne rozwiązanie równania* (1), *spełniające warunki początkowe*

$$x(0) = k_0, \quad x'(0) = k_1, \quad x''(0) = k_2, \quad x'''(0) = k_3. \tag{4}$$

Ze wzoru (2) i z trzech wzorów po nim następujących widać, że

$$C(0) = 1, \quad C'(0) = 0, \quad C''(0) = 0, \quad C'''(0) = 0. \tag{5}$$

Zatem funkcja $C(t)$ może być zdefiniowana jako jedyne rozwiązanie równania (1) spełniające warunki (5). Podobnie funkcja $S(t)$ jest jedynym rozwiązaniem równania (1) spełniającym warunki

$$S(0) = 0, \quad S'(0) = 0, \quad S''(0) = 1, \quad S'''(0) = 0. \ /$$

3. Postać wyznacznikowa wzoru jedynkowego. Wrońskian funkcyj $C, S', S, -C'$ ma postać

$$W = \begin{vmatrix} C & S' & S & -C' \\ C' & C & S' & S \\ -S & C' & C & S' \\ -S' & -S & C' & C \end{vmatrix}.$$

Różniczkując ten wyznacznik według wierszy, dostajemy sumę czterech wyznaczników, z których każdy ma po dwa wiersze identyczne lub różniące się tylko znakiem. Stąd wynika, że pochodna W' jest równa 0 i, w konsekwencji, że wyznacznik ma wartość stałą dla wszystkich t. Łatwo sprawdzić dla $t = 0$, że

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

zatem mamy identyczność

$$\begin{vmatrix} C & S' & S & -C' \\ C' & C & S' & S \\ -S & C' & C & S' \\ -S' & -S & C' & C \end{vmatrix} = 1,$$

analogiczną do trygonometrycznego wzoru jedynkowego

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1.$$

Inną postać wzoru jedynkowego podamy w paragrafie 5.

4. Dalsze wzory wyznacznikowe. Oznaczmy przez (C), (S'), (S) i (C') minory odpowiadające elementom C, S', S i C' z pierwszego wiersza wyznacznika W. Jest więc

$$W = C\cdot(C)+S'\cdot(S')+S\cdot(S)+C'\cdot(C'). \tag{6}$$

Porządkując wiersze w minorach tak, by na przekątniach głównych znalazły się jednakowe elementy, mamy

$$(C) = \begin{vmatrix} C & S' & S \\ C' & C & S' \\ -S & C' & C \end{vmatrix}, \qquad (C') = \begin{vmatrix} C' & C & S' \\ -S & C' & C \\ -S' & -S & C' \end{vmatrix},$$

$$(S) = \begin{vmatrix} S & -C' & -C \\ S' & S & -C' \\ C & S' & S \end{vmatrix}, \qquad (S') = \begin{vmatrix} S' & S & -C' \\ C & S' & S \\ C' & C & S' \end{vmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, różniczkując minory według wierszy, że

$$(C)' = -(S'), \quad (S')' = -(S), \quad (S)' = (C'), \quad (C')' = -(C). \tag{7}$$

Stąd wynika w szczególności, że

$$(C)^{(4)}+(C) = 0.$$

Ponieważ funkcje (C), $(C)'$, $(C)''$ i $(C)'''$ przyjmują w punkcie $t = 0$ odpowiednio wartości

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

czyli

$$1,\ 0,\ 0,\ 0,$$

więc stąd wynika, że $(C) = C$. Wobec (7) możemy napisać cztery tożsamości

$$(C) = C, \quad (S') = -C', \quad (S) = -S, \quad (C') = -S', \tag{8}$$

czyli

$$\begin{vmatrix} C & S' & S \\ C' & C & S' \\ -S & C' & C \end{vmatrix} = C, \qquad \begin{vmatrix} S' & S & -C' \\ C & S' & S \\ C' & C & S' \end{vmatrix} = -C',$$

$$\begin{vmatrix} S & -C' & -C \\ S' & S & -C' \\ C & S' & S \end{vmatrix} = -S, \qquad \begin{vmatrix} C' & C & S' \\ -S & C' & C \\ -S' & -S & C' \end{vmatrix} = -S'.$$

5. Inna postać wzoru jedynkowego. Wobec (6) i (8) wzór jedynkowy z paragrafu 3 daje się napisać w następującej prostej postaci:

$$C^2-2C'S'-S^2=1. \tag{9}$$

Wzór ten można sprawdzić bezpośrednio przez podstawienie do niego (2) i (3). Prościej można go sprawdzić, zauważywszy, że pochodna lewej strony jest równa

$$2CC'-2C''S'-2C'S''-2SS'=0$$

na podstawie równości $C''=-S$ i $S''=C$. Zatem lewa strona (9) jest stałą; stała ta wynosi 1, ponieważ dla $t=0$ lewa strona — jak widać od razu — ma wartość 1.

6. Wzory na sumę argumentów. Z twierdzenia I wynika

TWIERDZENIE II. *Jeżeli funkcja* $x(t)$ *spełnia równanie* (1) *i warunki* (4), *to ma postać*

$$x(t)=k_0C(t)+k_1S'(t)+k_2S(t)-k_3C'(t).$$

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że funkcje C, S', S i $-C'$ są rozwiązaniami równania (1), spełniającymi odpowiednio warunki początkowe:

$$1,0,0,0; \quad 0,1,0,0; \quad 0,0,1,0; \quad 0,0,0,1.$$

Dla dowolnie ustalonego u funkcja $C(t+u)$ spełnia warunki początkowe

$$C(u), \quad C'(u), \quad -S(u), \quad -S'(u).$$

Stąd wynika wzór

$$C(t+u)=C(t)C(u)+S'(t)C'(u)-S(t)S(u)+C'(t)S'(u). \tag{10}$$

Przez kolejne różniczkowanie tego wzoru względem t dostajemy dalsze wzory na sumę argumentów:

$$C'(t+u) = C'(t)C(u)+C(t)C'(u)-S'(t)S(u)-S(t)S'(u), \tag{11}$$

$$S(t+u) = S(t)C(u)-C'(t)C'(u)+C(t)S(u)+S'(t)S'(u), \tag{12}$$

$$S'(t+u) = S'(t)C(u)+S(t)C'(u)+C'(t)S(u)+C(t)S'(u). \tag{13}$$

Podstawiając w (10) $u = -t$ otrzymujemy, wobec parzystości C i S oraz nieparzystości C' i S', jeszcze jeden dowód wzoru jedynkowego (9).

Podstawiając zaś $u = -t$ w (12), otrzymujemy wzór

$$S'^2-C'^2 = 2CS. \tag{14}$$

(Podstawienie $u = -t$ do wzorów (11) i (13) nie daje nic nowego).

7. **Wzory dla podwójnego argumentu.** Podstawiając w (10), (11), (12) i (13) $u = t$, dostajemy wzory dla podwójnego argumentu:

$$C(2t) = C^2(t)+2C'(t)S'(t)-S^2(t),$$

$$C'(2t) = 2C(t)C'(t)-2S(t)S'(t),$$

$$S(2t) = 2C(t)S(t)-C'^2(t)+S'^2(t),$$

$$S'(2t) = 2C(t)S'(t)+2C'(t)S(t).$$

Wobec (14) wzór dla $S(2t)$ upraszcza się do postaci

$$S(2t) = 4C(t)S(t), \tag{15}$$

która jest podobna do znanego z trygonometrii wzoru $\sin 2t = 2\sin t\cos t$.

8. **Równanie funkcyjne dla $C(t)$.** Z (9) i (15) wynika

$$C(2t) = 2C^2(t)-2S^2(t)-1, \tag{16}$$

a przez podwojenie argumentu

$$C(4t) = 2C^2(2t)-2S^2(2t)-1.$$

Stąd wobec (15)

$$C(4t) = 2C^2(2t)-32C^2(t)S^2(t)-1. \tag{17}$$

Eliminując $S^2(t)$ z (16) i (17) otrzymujemy następujące równanie funkcyjne dla $C(t)$:

$$C(4t)-2C(2t)[C(2t)+8C^2(t)]+32C^4(t)-16C^2(t)+1 = 0. \tag{18}$$

Udowodnimy, że

Funkcja $C(t)=\cosh t/\sqrt{2}\cosh t/\sqrt{2}$ *jest jedyną funkcją analityczną w otoczeniu* $t=0$ *spełniającą równanie* (18) *i warunki początkowe*

$$C(0)=1, \quad C''(0)=0, \quad C^{(4)}(0)=1. \tag{19}$$

Wystarczy udowodnić, że dla funkcji

$$f(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\ldots \tag{20}$$

współczynniki c_i są przez warunki (18) i (19) określone jednoznacznie.

Jeżeli wstawimy (20) do (18), to współczynniki przy potęgach t z lewej strony równości (18) powinny być równe 0. Współczynnik przy t^n $(n\geqslant 1)$ będzie wielomianem $w=w(c_0,\ldots,c_n)$ ze względu na $c_0,\ldots,c_n$; współczynniki c_i ze wskaźnikiem i większym od n nie będą w tym wielomianie figurowały. Biorąc pod uwagę, że $c_0=C(0)=1$, łatwo wypisać sumę wszystkich wyrazów wielomianu w, zawierających stałą c_n:

$$\{4^n-2[2^n_{\text{ił}}(1+8)+(2^n+2\cdot 8)]+32\cdot 4-16\cdot 2\}c_n=2^6[1+2^{n-4}(2^{n-2}-5)]c_n.$$

Stąd widać, że współczynnik przy c_n jest dodatni dla $n\geqslant 5$, a dla $n=1,2,3,4$ wynosi odpowiednio

$$28,\ 0,\ -32,\ 0.$$

Stąd wynika, że dla $n\neq 0,2,4$ współczynnik c_n daje się wyrazić jako wielomian współczynników $c_0,\ldots,c_{n-1}$. Wobec tego współczynniki c_n dają się obliczać rekurencyjnie i są określone jednoznacznie, jeżeli tylko znamy już współczynniki c_0, c_2 i c_4.

9. Kres górny odległości zer. Z postaci funkcyj

$$C(t)=\cosh\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad S(t)=\sinh\frac{t}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}$$

widać, że przyjmują one wartość 0 dokładnie w tych samych punktach, co $\cos\frac{t}{\sqrt{2}}$ i $\sin\frac{t}{\sqrt{2}}$. Odległości między kolejnymi zerami każdej z tych funkcyj wynoszą

$$\sqrt{2}\cdot\pi=4{,}442883.$$

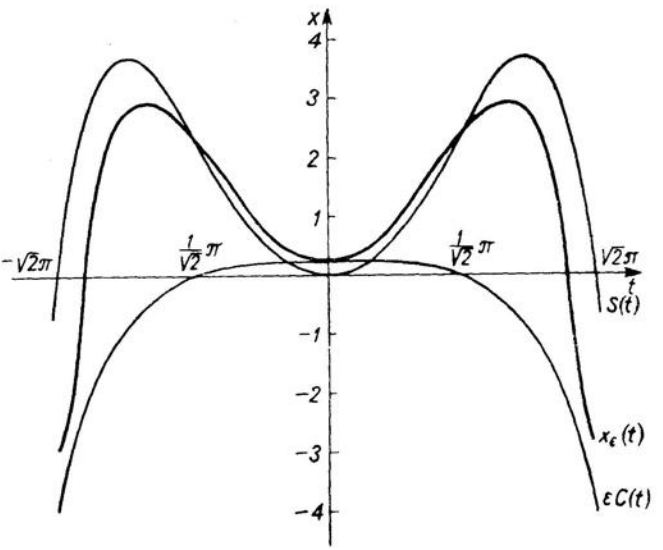
Przez kombinacje liniowe funkcyj $C(t)$ i $S(t)$ możemy otrzymać rozwiązania równania (1) mające inne odległości zer. Na przykład funkcja

$$x_\varepsilon(t)=S(t)+\varepsilon\cdot C(t) \quad (\varepsilon>0), \tag{21}$$

jak to widać z rysunku 2, jest różna od zera w przedziale $(-A_\varepsilon, A_\varepsilon)$, który jest większy od $\sqrt{2}\pi$. Gdy ε dąży do 0, to odległość zer $-A_\varepsilon$ i A_ε dąży do $2\sqrt{2}\pi$. (Dla wartości granicznej $\varepsilon = 0$ pojawia się już nowe zero (podwójne) w punkcie $t = 0$.) Stąd wynika, że dla każdej liczby dodatniej $D < 2\sqrt{2}\pi$ można podać rozwiązanie równania (1), którego dwa sąsiednie zera znajdują się w odległości większej od D.

Udowodnimy, że

Dla każdego rozwiązania $x(t)$ równania (1) *odległość sąsiednich zer jest zawsze mniejsza niż $2\sqrt{2}\pi$.*



Rys. 2

Z poprzednich uwag wynika, że w tym twierdzeniu liczba $2\sqrt{2}\pi$ nie może być zastąpiona przez mniejszą. Inaczej mówiąc, liczba $2\sqrt{2}\pi$ jest kresem górnym odległości zer, ale kres ten nie jest osiągnięty dla żadnego rozwiązania.

Dowód. Jeżeli A i B $(A < B)$ są sąsiednimi zerami rozwiązania $x(t)$, to funkcja $x(t-\lambda)$ jest rozwiązaniem równania (1), mającym sąsiednie zera w punktach $A+\lambda$ i $B+\lambda$. Dobierając odpowiednio λ, można zera A i B dowolnie przesuwać, zachowując ich odległość. W szczególności można je tak przesunąć, że będą leżały symetrycznie względem punktu $t = 0$. Istnieje więc rozwiązanie $y(t)$ równania (1) mające sąsiednie zera w punktach $-C$ i C, przy czym odległość tych zer wynosi

$$2C = B - A.$$

Funkcja $y(-t)$ spełnia także równanie (1) i ma sąsiednie zera w punktach $-C$ i C. Funkcje $y(t)$ i $y(-t)$ są różne od zera w przedziale $(-C, C)$ i mają ten sam znak. Stąd wynika, że ich suma

$$z(t) = y(t)+y(-t)$$

ma sąsiednie zera w punktach $-C$ i C.

Widać, że $z(-t) = z(t)$; zatem funkcja $z(t)$ jest parzysta i może być przedstawiona w postaci

$$z(t) = aS(t)+bC(t),$$

gdzie a i b są liczbami stałymi, z których co najmniej jedna jest różna od zera. Jeżeli $a = 0$, to zerami najbliższymi punktu $t = 0$ są $-\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$ i $\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$. Odległość tych zer wynosi $\sqrt{2}\pi$. W tym więc przypadku twierdzenie jest spełnione. Gdy $a \neq 0$, to napiszmy

$$u(t) = \frac{1}{a}z(t) = S(t)+\frac{b}{a}C(t).$$

Funkcja $u(t)$ ma dokładnie te same zera co $z(t)$ i jest postaci (21), która była już przedyskutowana poprzednio dla $b/a = \varepsilon \geqslant 0$. W tym przypadku odległość rozważanych zer jest także mniejsza od $2\sqrt{2}\pi$. W pozostałym do rozpatrzenia przypadku $b/a = \varepsilon < 0$ czytelnik z łatwością sprawdzi, że odległość zer jest mniejsza niż $\sqrt{2}\pi$.

10. Kres dolny odległości zer. Łatwo udowodnić, że *zera rozwiązań równania* (1) *mogą być dowolnie blisko*, czyli że kres dolny ich odległości jest równy 0. Wynika to z następującego twierdzenia:

Dla dowolnych liczb t_1 *i* t_2 *istnieje takie rozwiązanie* $x(t)$ *równania* (1), *że* $x(t_1) = x(t_2) = 0$.

Rozwiązanie takie można z łatwością wypisać *explicite*:

$$x(t) = S(t_2-t_1)S'(t-t_1)-S'(t_2-t_1)S(t-t_1).$$

11. Zagadnienie brzegowe. Udowodnione w poprzednim paragrafie twierdzenie mówi, że rozwiązaniu $x(t)$ równania (1) można w dwóch dowolnych punktach t_1 i t_2 nadać wartości zerowe. Udowodnimy obecnie twierdzenie mocniejsze, że w dowolnych dwóch punktach można zadać zupełnie dowolne wartości i to nie tylko funkcji $x(t)$, ale jednocześnie także jej pochodnej $x'(t)$.

Jeżeli t_1, t_2, k_1, k_1', k_2 *i* k_2' *są dowolnymi liczbami, to istnieje takie rozwiązanie równania* (1), *że*

$$x(t_1) = k_1, \quad x'(t_1) = k_1', \quad x(t_2) = k_2, \quad x'(t_2) = k_2'.$$

Dowód. Bez szkody dla ogólności dowodu można przyjąć, że $t_1 = 0$ i $t_2 > 0$. Funkcja

$$x(t) = k_1 C(t) + k_1' S'(t) + \alpha S(t) + \beta C'(t)$$

spełnia żądane warunki w punkcie $t_1 = 0$, jakiekolwiek wartości przyjmiemy dla α i β. Dobierzemy α i β w ten sposób, żeby spełnione były także warunki zadane w t_2. Warunki te można napisać w postaci

$$k_1 C(t_2) + k_1' S'(t_2) + \alpha C'(t_2) + \beta S(t_2) = k_2,$$

$$k_1 C'(t_2) + k_1' C(t_2) - \alpha S(t_2) + \beta S'(t_2) = k_2'.$$

Stałe α i β zawsze dadzą się dobrać, jeżeli wyznacznik

$$w = \begin{vmatrix} C' & S \\ -S & S' \end{vmatrix}$$

jest różny od zera w punkcie t_2.

Istotnie, na podstawie wzoru jedynkowego (9) jest

$$w = C'S' + S^2 = \tfrac{1}{2}(C^2 + S^2 - 1).$$

Pisząc dla skrócenia $t_0/\sqrt{2} = u$, mamy stąd

$$\begin{aligned} w(t_0) &= \tfrac{1}{2}(\cosh^2 u \cos^2 u + \sinh^2 u \sin^2 u - 1) = \\ &= \tfrac{1}{2}[(1 + \sinh^2 u)(1 - \sin^2 u) + \sinh^2 u \sin u - 1] = \\ &= \tfrac{1}{2}(\sinh^2 u - \sin^2 u) > 0 \quad \text{dla} \quad u \neq 0. \end{aligned}$$

Ponieważ $t_2 = 0$, więc $u \neq 0$ i twierdzenie jest dowiedzione.

12. Uogólnione zagadnienie brzegowe. W paragrafie poprzednim zadawaliśmy wartości w punktach t_1 i t_2 funkcjom $x(t)$ i $x'(t)$. Okazuje się, że dowolne wartości można zadawać dowolnym spośród funkcyj $x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)$, byleby dwie wartości zostały zadane w punkcie t_1 i dwie w punkcie t_2. Prawdziwe jest mianowicie twierdzenie następujące:

Istnieje rozwiązanie $x(t)$ równania (1), *spełniające warunki*

$$x^{(i_1)}(t_1) = k_1, \quad x^{(i_2)}(t_1) = k_2, \quad x^{(i_3)}(t_2) = k_3, \quad x^{(i_4)}(t_2) = k_4$$

dla dowolnie zadanych liczb $t_1, t_2, k_1, k_2, k_3, k_4$ i dowolnie zadanych rzędów pochodnych i_1, i_2, i_3, i_4 wybranych spośród liczb $0, 1, 2, 3$ *tak, że $i_1 \neq i_2$, $i_3 \neq i_4$.*

Dowód. Założymy, że $t_1 = 0$ i $t_2 > 0$. Zauważmy naprzód, że funkcja $-C^{(4-i)}(t)$ ma tę własność, że jej pochodna rzędu i $(i = 0, 1, 2, 3)$ ma

wartość 1 w $t=0$, pozostałe zaś pochodne rzędu $\leqslant 3$ są równe 0 w $t=0$. Wobec tego funkcja

$$x = -k_1 C^{(4-i_1)} - k_2 C^{(4-i_2)} + \alpha C^{(j)} + \beta C^{(k)},$$

gdzie liczby $4-i_1, 4-i_2, j, k$ tworzą permutację liczb $0, 1, 2, 3$, jest rozwiązaniem równania (1), spełniającym żądane warunki w punkcie $t_1 = 0$. Można założyć, że $j > k$. Aby możliwe było dopasowanie funkcji x do warunków w punkcie t_2, wystarczy pokazać, podobnie jak w poprzednim paragrafie, że

$$w = \begin{vmatrix} C^{(j)} & C^{(k)} \\ C^{(j+1)} & C^{(k+1)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (j \neq k).$$

Zauważmy, że

$$w' = w_1 = \begin{vmatrix} C^{(j)} & C^{(k)} \\ C^{(j+2)} & C^{(k+2)} \end{vmatrix};$$

$$w_1' = w_2 + w_3, \quad \text{gdzie} \quad w_2 = \begin{vmatrix} C^{(j+1)} & C^{(k+1)} \\ C^{(j+2)} & C^{(k+2)} \end{vmatrix}, \quad w_3 = \begin{vmatrix} C^{(j)} & C^{(k)} \\ C^{(j+3)} & C^{(k+3)} \end{vmatrix};$$

$$w_2' = w_4 = \begin{vmatrix} C^{(j+1)} & C^{(k+1)} \\ C^{(j+3)} & C^{(k+3)} \end{vmatrix}; \qquad w_3' = w_4;$$

$$w_4' = w + w_5, \quad \text{gdzie} \quad w_5 = \begin{vmatrix} C^{(j+2)} & C^{(k+2)} \\ C^{(j+3)} & C^{(k+3)} \end{vmatrix}; \qquad w_5' = w_1.$$

Funkcje

$$w,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \text{ i } w_4 \tag{22}$$

spełniają więc układ równań

$$\begin{aligned} w' &= w_1, & w_3' &= w_4, \\ w_1' &= w_2 + w_3, & w_4' &= w + w_5, \\ w_2' &= w_4, & w_5' &= w_1. \end{aligned} \tag{23}$$

Korzystając z równości $C(0) = 1$, $C'(0) = C''(0) = C'''(0) = 0$ oraz $C^{(i+4)}(0) = -C^{(i)}(0)$, łatwo znaleźć wartości funkcyj (22) w $t = 0$ w zależności od j i k. Przedstawiamy je w następującej tabelce:

j	k	$w(0)$	$w_1(0)$	$w_2(0)$	$w_3(0)$	$w_4(0)$	$w_5(0)$
1	0	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	1
3	0	1	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	1	0
3	2	0	0	1	0	0	0

Widać, że dla każdej pary j, k dokładnie jedna spośród funkcyj (22) ma wartość 1 pozostałe zaś mają wartość 0 w punkcie $t = 0$. Stąd i z postaci równań (23) wynika, że wszystkie funkcje (22) są w prawostronnym otoczeniu punktu $t = 0$ dodatnie. Są one dodatnie także dla wszystkich $t > 0$. Istotnie, gdyby największy przedział, gdzie wszystkie funkcje (22) są dodatnie, był skończony $(0, T)$, wówczas w punkcie T co najmniej jedna z funkcyj (22) byłaby równa 0. Wobec (23) funkcja ta ma pochodną dodatnią w $(0, T)$, a poza tym jest nieujemna w $t = 0$, więc jest dodatnia w punkcie T. Otrzymana sprzeczność dowodzi twierdzenia.