ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IV (1960)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

J. MAYR (Walchsee, Tyrol)

Dni tygodnia i matematyka(*)

Jeżeli chcemy wiedzieć, w którym dniu tygodnia miało miejsce jakieś historyczne wydarzenie, a nie mamy pod ręką odpowiednich tablic, to będziemy zadowoleni znając łatwą do zapamiętania metodę obliczenia tego dnia.

Istnieją dwie metody tego rodzaju. Dla stosowania pierwszej niezbędny jest kalendarz, druga obywa się bez niego. Musimy, oczywiście, zapamiętać pewne reguły, lecz w wielu wypadkach są one bardzo proste. Na przykład, jeżeli chcemy wiedzieć jaki był dzień tygodnia 18. 9. 1456, napiszmy kolejno te trzy liczby, dołączmy na końcu zero i całość podzielmy przez 7. Reszta z dzielenia jest numerem żądanego dnia rozpoczynając od soboty, której jest przyporządkowana liczba 0. Niedzieli jest przyporządkowana liczba 1, poniedziałkowi liczba 2, wtorkowi 3, środzie 4, czwartkowi 5 i piątkowi 6. W podanym wyżej przykładzie 18914560:7 daje resztę zero, a zatem szukanym dniem jest sobota. Podobnie znajdziemy dzień tygodnia dla daty 20. 3. 1208. Dzieląc 20312080:7 otrzymamy resztę 5, czyli dzień ten wypadł w czwartek.

Metoda posługująca się kalendarzem

Jeżeli chcemy wiedzieć, jaki dzień tygodnia wypada dla danej daty, poszukujemy najpierw, w którym dniu wypada tego roku Boże Narodzenie. Następnie z łatwością znajdujemy dni tygodnia dla wszystkich dat posługując się dowolnym kalendarzem.

Jak znaleźć dzień Bożego Narodzenia? W kalendarzu juliańskim dołączamy zero do liczby roku i wynik dzielimy przez 7, jeżeli jest to rok przestępny; jeżeli jest to rok zwykły dodajemy różnicę między poprzednim rokiem przestępnym i danym rokiem do roku przestępnego pomnożonego przez 10. Dla roku 1456 weźmiemy 14560, dla 1457 weźmiemy 14561, dla 1458 — 14562 itd. Algebraicznie dzień c Bożego Narodzenia w roku Y znajdujemy jako resztę z dzielenia $[10(Y-r)+r]:7$, gdzie r

(*) Przekład artykułu z The Mathematical Gazette 43 (1959), str. 81-84.

jest resztą z dzielenia $Y:4$. Jeżeli chcemy wiedzieć, jaki był dzień tygodnia 20-go lipca 1456 roku, zaglądamy do kalendarza z 1958 r. i widzimy, że Boże Narodzenie było w czwartek. W 1456 r. Boże Narodzenie było w sobotę — dwa dni później. 20-go lipca wypada w 1958 r. w niedzielę, zatem w 1456 r. musi być we wtorek, również dwa dni później. Wniosek ten wyciąga się jedynie dla dat począwszy od pierwszego marca. Dla stycznia i lutego bierzemy pod uwagę dzień Bożego Narodzenia z poprzedniego roku, który jest taki sam jak dla następującego po nim Nowego Roku, aby nie popełnić błędu, który mógłby być spowodowany przestępnością roku.

Metodę tą można uzasadnić w następujący sposób. Z odpowiednich tablic można dowiedzieć się, że w roku 1 Nowy Rok wypadł w sobotę. Więc 25-go grudnia roku 0 wypada również w sobotę. Jeżeli nie byłoby lat przestępnych można by znaleźć dzień c Bożego Narodzenia roku Y obliczając resztę z dzielenia $Y:7$, ponieważ dzień tygodnia każdej daty wzrasta o 1 każdego roku, gdyż reszta z dzielenia $365:7$ wynosi 1. W latach przestępnych wzrasta on o 2. Liczbę p lat przestępnych poprzedzających rok Y znajdziemy ze wzoru $p = (Y-r)/4$, gdzie r jest resztą z dzielenia $Y:4$. W ten sposób znajdziemy c jako resztę z dzielenia

$$\left(Y+\frac{Y-r}{4}\right):7, \quad \text{reszta } c.$$

Zauważmy, że ułamek $(Y-r)/4$ jest liczbą całkowitą, ponieważ od dzielnej Y została odrzucona reszta r, można więc do dzielnej dodać wielokrotność $7(Y-r)/4$ liczby 7 nie zmieniając przy tym reszty c. W ten sposób

$$\left(Y+\frac{8Y-8r}{4}\right):7 \quad \text{daje resztę } c,$$

lub

$$(Y+2Y-2r):7 \quad \text{daje resztę } c.$$

Jeżeli znowu dodamy do dzielnej wielokrotność liczby 7, np. $7Y-7r$, to otrzymamy

$$(10Y-9r):7, \quad \text{reszta } c$$

lub

$$(10Y-10r+r):7, \quad \text{reszta } c,$$

lub

$$[10(Y-r)+r]:7, \quad \text{reszta } c.$$

W ten sposób metoda została udowodniona, lecz jedynie dla kalendarza juliańskiego, gdzie dodatkowy dzień jest dodawany bez wyjątku co cztery lata.

Kalendarz gregoriański został wprowadzony 15-go października 1582 r. z opuszczeniem dziesięciu dni po juliańskiej dacie 4-go października i od tego czasu dodatkowy dzień opuszcza się w latach podzielnych przez 100 wyjąwszy lata podzielne przez 400. Był on opuszczony w latach 1700, 1800, 1900, lecz nie w 1600 i nie będzie w 2000. Obecna różnica między oboma kalendarzami wynosi 13 dni. W bieżącym stuleciu Boże Narodzenie kalendarza gregoriańskiego jest 12-go grudnia kalendarza juliańskiego. Jeżeli juliańskie Boże Narodzenie wypada w czwartek, to 12-ty grudnia wypada w piątek. Dlatego, jeżeli używamy wzoru juliańskiego na znalezienie dnia Bożego Narodzenia, musimy dodać jeden dzień, aby znaleźć Boże Narodzenie kalendarza gregoriańskiego. W zeszłym stuleciu różnica wynosiła 12 dni i dla obliczenia dnia Bożego Narodzenia należało dodać dwa dni. Jeżeli poprawka, którą należy dodać, została oznaczona literą g, to dzień Bożego Narodzenia kalendarza gregoriańskiego otrzymamy posługując się formułą

$$[10(Y-r)+r+g]:7, \quad \text{reszta } c.$$

Jeżeli podzielimy rok Y przez 100, otrzymamy wiek C i resztę R, tzn. $Y = 100C+R$ i powyższa formuła przejdzie na

$$[1000C+10(R-r)+r+g]:7, \quad \text{reszta } c.$$

Jeżeli odejmiemy od dzielnej wielokrotność siedmiu $1001g$, otrzymamy

$$[1000C+10(R-r)+r-1000g]:7, \quad \text{reszta } c$$

albo

$$[1000(C-g)+10(R-r)+r]:7, \quad \text{reszta } c.$$

Innymi słowy, musimy dla kalendarza gregoriańskiego odejmować od liczby wieków: 1 dla lat począwszy od 1900, 2 od 1800, 3 od 1700 i 4 dla lat od 1528. Odejmuje się 1 dla lat od 1900 aż do 2099, ponieważ dodatkowy dzień nie jest opuszczony w r. 2000.

W ten sposób otrzymuje się dzień Bożego Narodzenia 1958 r. dzieląc 18562:7, reszta 5 — czwartek; dzień Bożego Narodzenia 1858 dzieląc 16562:7, reszta 0 — sobota; dzień Bożego Narodzenia dla 1758 dzieląc 14562:7, reszta 2 — poniedziałek; dla 1582 11802:7, reszta 0 — sobota; dla 2000 19000:7, reszta 2 — poniedziałek.

Metoda pór roku

Metoda bez użycia kalendarza nazywa się metodą pór roku. Dlaczego? Na początku artykułu podaliśmy przykłady 18. 9. 1456 i 20. 3. 1208; można by również połączyć 14. 6. 1084 i obliczyć dzień dzieląc

14610840:7, wypada reszta 6 — piątek. Numer grudnia 12 składa się z dwóch cyfr, metoda nie dopuszcza jednak liczb dwucyfrowych. Jest godne uwagi, że można opuścić jedynkę i zamiast 12 napisać tylko 2. Znajdziemy w ten sposób, że dzień 25. 12. 1044 wypadł we wtorek, gdyż reszta z dzielenia 25210440:7 jest 3.

We wszystkich tych przykładach jako liczby miesięcy występowały liczby 3, 6, 9, 12 marca, czerwca, września i grudnia, z których każdy rozpoczyna jedną z pór roku. Musimy teraz wyznać, że metoda ta posiada jedną usterkę: stosuje się ona jedynie do tych czterech miesięcy. Ominięcie tej usterki jest jednak łatwe: można wyrazić wszystkie daty w terminach tych czterech miesięcy i metoda zostanie ocalona. Można powiedzieć, że 10 kwietnia jest tym samym dniem co 41 marca, 5-ty maja jest 66 marca, 15-ty lipca jest 45 czerwca, 1 stycznia jest 32 grudnia poprzedniego roku, 1 lutego jest 63 grudnia.

Jeszcze jedną rzecz należy zauważyć. Liczba roku musi posiadać cztery cyfry; jeżeli szukamy, jaki dzień tygodnia był 7. 4. 30, musimy napisać 38. 3. 0030 i znaleźć go obliczając resztę z dzielenia 38300282:7, wypada 6, czyli piątek.

Istnieje wskazówka na szybkie obliczanie reszty z dzielenia przez 7. Dzieli się dzielną na grupy trzycyfrowe i po znalezieniu reszty każdej z tych grup ustawia się kolejno ze znakami na przemian plus i minus rozpoczynając od prawej reszty ze znakiem plus. Przykłady:

88611243:7, reszta 0, 89913442:7, reszta 3,
88 611 243:7, reszta 0, 89 913 442:7, reszta 3,
(+4 −2 +5):7, reszta 0, (+5 −3 +1):7, reszta 3.

Jeżeli reszta wypada ujemna należy dodać 7.

43915003 :7, reszta 6,
43 915 003:7, reszta 6,
(+1−5+3) :7, reszta −1; −1+7 = 6.

Należałoby jeszcze uzasadnić metodę pór roku. W kalendarzu, w którym Boże Narodzenie jest w czwartek, 1 marca wypada w sobotę i ostatni dzień lutego jest w piątek. Można nazwać ten dzień zerowym dniem marca. Jest on o jeden dzień później niż dzień tygodnia Bożego Narodzenia. Jeżeli dzień Bożego Narodzenia jest c, wówczas dzień w daty D marca można znaleźć posługując się formułą

$$(c+1+D):7, \quad \text{reszta } w,$$

albo

$$[10(Y-r)+r+1+D]:7, \quad \text{reszta } w$$

dla kalendarza juliańskiego. Jeżeli dodamy do dzielnej wielokrotność siedmiu $999999D+299999$, otrzymamy

$$[1000000D+300000+10(Y-r)+r]:7, \quad \text{reszta } w.$$

Jest to właśnie dowód dla marca. Jeżeli Boże Narodzenie jest w czwartek, wówczas zerowy dzień czerwca (ostatni dzień maja) wypada w sobotę, tzn. o dwa dni później. Dodając do dzielnej z formuły $(c+2+D):7$, reszta w, wielokrotność siedmiu $999999D+599998$ otrzymamy

$$[1000000D+600000+10(Y-r)+r]:7, \quad \text{reszta } w.$$

W kalendarzu, w którym Boże Narodzenie jest w czwartek, 0 września i 0 grudnia wypadają w niedzielę, o trzy dni później. Dodając do formuły $(c+3+D):7$, reszta w, odpowiednio wielokrotności $999999D+$ $+899997$ i $999999D+199997$ otrzymamy wzory

$$[1000000D+900000+10(Y-r)+r]:7, \quad \text{reszta } w, \text{ dla września,}$$

$$[1000000D+200000+10(Y-r)+r]:7, \quad \text{reszta } w, \text{ dla grudnia.}$$

Jeżeli chcemy znać dni tygodnia dla dat p. n. e., musimy odjąć rok od 7001; następnie otrzymaną resztę traktuje się tak jak poprzednio. Dlaczego dany rok należy odejmować od 7001, a nie od 7000? W kalendarzu juliańskim takie same dni tygodnia powtarzają się co 28 lat, a więc i co 7000 lat. Jednakże historycy opuszczają rok 0 i numerują rok poprzedzający rok 1 liczbą -1. Astronomowie natomiast nazywają rok 1 p. n. e. historyków rokiem 0, rok 2 p. n. e. — rokiem -1.

Cesarz August urodził się w r. 63 p. n. e. lub w języku astronomów w roku -62. $2000-62=1938$. Mussolini obchodził tę dwutysięczną rocznicę w roku 1937 zamiast w 1938. August urodził się 23-go września 63 r. p. n. e. $7001-63=6938$; $23969362:7$ daje resztę 4, środa.

Cycero umarł w roku 43 p. n. e. tzn. w -42 według numeracji astronomów. Nauczyciele wielu gimnazjów klasycznych obchodzili rocznicę w 1957 r. zamiast w 1958, co filologom można by wybaczyć. Lecz w tych samych szkołach nie zaprotestował żaden z matematyków, co daje świadectwo, że nie dba się wiele o matematyczną chronologię.

Bardzo modną datą jest początek kalendarza żydowskiego w poniedziałek, 7-go października 3761 p. n. e. $7001-3761=3240$; $37932400:7$, reszta 2.