ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IV (1960)

wmptm 1897

E. BIAŁOBORSKI (Kraków)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O liczbach kolistych

Jeżeli liczba naturalna K_1, zapisana w układzie pozycyjnym o dowolnej podstawie naturalnej $B > 1$, będzie posiadać n cyfr $c_n, c_{n-1}, \ldots$ $\ldots, c_2, c_1$, to jej wartość da się przedstawić w następującej postaci: $K_1 = B^{n-1}c_n + B^{n-2}c_{n-1} + \ldots + B^2c_3 + B^1c_2 + B^0c_1$. Jeżeli pierwszą cyfrę tej liczby (c_n) przeniesiemy na miejsce ostatnie, to powstanie odmiana kolista K_2 liczby K_1. Wartość nowej liczby można zapisać w postaci:

$$K_2 = B^{n-1}c_{n-1} + B^{n-2}c_{n-2} + \ldots + B^2c_2 + B^1c_1 + B^0c_n.$$

Podobną czynność można powtarzać wielokrotnie, otrzymując dalsze odmiany koliste liczby K_1. Z powyższych równości po wykonaniu elementarnych rachunków otrzymujemy

$$K_2 = B \cdot K_1 - (B^n - 1) \cdot c_n.$$

Z tej ostatniej zależności wnosimy, że każdy wspólny dzielnik liczb K_1 i $B^n - 1$ jest dzielnikiem liczby K_2, i podobnie, że każdy wspólny dzielnik liczb K_1 i $B^n - 1$ jest dzielnikiem dowolnej odmiany kolistej liczby K_1.

Liczbę naturalną K_1 zapisaną w pewnym układzie pozycyjnym będziemy nazywali kolistą względem pewnego jej dzielnika d, gdy każda odmiana kolista liczby K_1 jest podzielna przez d.

Wynik powyższych rozważań możemy sformułować jako

TWIERDZENIE. *Jeśli dzielnik d liczby naturalnej K, która ma n cyfr w układzie pozycyjnym o podstawie $B > 1$, dzieli liczbę $B^n - 1$, to K jest liczbą kolistą względem d.*

Z twierdzenia możemy wyprowadzić następujące wnioski:

WNIOSEK 1: *Jeśli liczba d jest względnie pierwsza z podstawą układu pozycyjnego B, to istnieje nieskończenie wiele liczb kolistych względem dzielnika d. Liczbami takimi są na przykład wszystkie liczby podzielne przez d o $l \cdot \varphi(d)$ cyfrach, gdzie $l = 1, 2, 3, \ldots$, φ zaś jest funkcją Eulera.*

Istotnie, na mocy twierdzenia Eulera, wobec $(B, d) = 1$, mamy $d \mid B^{\varphi(d)} - 1 \mid B^{l \cdot \varphi(d)} - 1$.

WNIOSEK 2: *Gdy weźmiemy n liczb całkowitych nieujemnych* $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_2, c_1$ *spełniających warunek* $c_n+c_{n-1}+\ldots+c_1>1$, *to istnieją takie liczby naturalne* $B>1$ *i* $d>1$, *że liczba K, która w układzie pozycyjnym o podstawie B ma cyfry* $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_2, c_1$, *jest kolista względem dzielnika d. Mianowicie wystarczy przyjąć* $B=c_n+c_{n-1}+\ldots+c_1+1$ *zaś* $d=B-1=c_n+c_{n-1}+\ldots+c_1$.

Istotnie, na mocy naszego twierdzenia wystarczy dowieść, że $d|K = c_nB^{n-1}+c_{n-1}B^{n-2}+\ldots+c_2B+c_1$ oraz że $d|B^n-1$. Z określenia liczb K, B i d mamy:

$$K = d+(K-d)+(c_nB^{n-1}+c_{n-1}B^{n-2}+\ldots+c_3B^2+$$
$$+c_2B+c_1-c_n-c_{n-1}-\ldots-c_3-c_2-c_1) = d+c_n(B^{n-1}-1)+$$
$$+c_{n-1}(B^{n-2}-1)+\ldots+c_3(B^2-1)+c_2(B-1).$$

Widzimy, że każdy składnik tej ostatniej sumy jest podzielny przez $d=B-1$, zatem $d|K$.

Mamy też oczywiście $d=B-1|B^n-1$, co kończy dowód.