wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zadania

Gwiazdką * oznaczane są zagadnienia, których rozwiązanie nie jest znane autorowi ani redakcji, albo znane jest tylko rozwiązanie częściowe. Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, uwagi o zadaniach, nowe zadania itp.) należy wysyłać pod adresem: Andrzej Lelek, Wrocław 2, Plac Zgody 11/20. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane.

7. Znaleźć dwa przekształcenia ciągłe f i g kwadratu K na siebie (tzn. $f(K) = g(K) = K$) takie, że $f(p) \neq g(p)$ dla każdego $p \in K$.

Jan Mycielski (Wrocław)

8. Znaleźć przekształcenie ciągłe f kwadratu K takie, że $K \subset f(K)$, K i $f(K)$ są homeomorficzne i $p \neq f(p)$ dla każdego $p \in K$.

B. Grell (Kraków)

9. Dla jakich funkcji f istnieje funkcja φ („pochodna całkowa") taka, że

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \varphi(x) \right| dx = 0 ?$$

S. Hartman (Wrocław)

10*. Dla każdego typu porządkowego τ można określić liczbę kardynalną $\mathfrak{m}(\tau)$ jako moc zbioru wszystkich przekształceń danego (jakiegokolwiek) zbioru typu τ na siebie, wzajemnie jednoznacznych i zachowujących porządek. Zbadać własności funkcji $\mathfrak{m}(\tau)$ dla typów przeliczalnych. W szczególności podać przykłady typów „sztywnych" (tj. takich, że $\mathfrak{m}(\tau) = 1$) i jakieś warunki sztywności (1).

S. Hartman (Wrocław)

11. Udowodnić, że każdy przeliczalny podzbiór przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej ($n \geqslant 2$) jest przystający do wykresu pewnej

(1) Częściowe rozwiązanie znajduje się w pracy: S. Hartman, *Zur Geometrisierung der abzählbaren Ordnungstypen*, Fund. Math 29 (1937), str. 209-214.

funkcji $n-1$ zmiennych; w szczególności, każdy przeliczalny zbiór płaski przystaje do wykresu pewnej funkcji jednej zmiennej (2).

A. Mąkowski (Warszawa)

12*. Obliczyć $\inf\limits_{\sum|a_i|=1} \sup\limits_{|z|=1} |a_0+a_1z+a_2z^2|$, gdzie z i a_i są liczbami zespolonymi.

A. Pełczyński (Warszawa)

13*. Czy jeżeli a_i są całkowite i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_{k+n}}{n!}$ jest całkowitą wielokrotnością liczby e dla każdego $k = 0, 1, 2, \ldots$, to musi istnieć wielomian $f(x)$ o współczynnikach całkowitych taki, że $a_k = f(k)$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$? (Twierdzenie odwrotne jest w książce Pólya-Szegö, *Aufgaben* I).

W. Narkiewicz (Wrocław)

14*. Niech K będzie kwadratem o boku 1. Znaleźć wzór dla funkcji

$$R(n) = \inf_{\bigcup A_i = K} \max_{i=1,\ldots,n} \delta(A_i), \tag{i}$$

gdzie $\delta(X)$ oznacza średnicę zbioru X i n jest liczbą naturalną. Wiadomo, jakie wartości przyjmuje funkcja R dla $n = 2$ i 3. Ciekawe byłoby już znalezienie $R(5)$. Czy funkcja R zmieni się, jeśli w definicji (i) ograniczymy inf do węższej klasy zbiorów $A_1, \ldots, A_n$, np. do zbiorów rozłącznych, spójnych, albo wypukłych? Podobne pytania nasuwają się, gdy K nie jest kwadratem, ale inną figurą, np. kołem lub trójkątem.

H. Steinhaus (Wrocław)

15*. Niech będą dane w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej dwie proste równoległe p, p' i zbiór Z ograniczony. Czy jeżeli przekrój zbioru Z z każdą płaszczyzną zawierającą prostą p lub p' jest kołem, to Z jest kulą?

H. Steinhaus (Wrocław)

16. Nie istnieje pięciobok (przestrzenny) o wszystkich kątach prostych i bokach równych.

H. Steinhaus (Wrocław)

---

(2) Porównaj: W. Sierpiński, *Algèbre des ensembles*, Warszawa-Wrocław 1951, str. 129.

17. Czy można podzielić zwykłą sferę na trzy zbiory A, B i C parami rozłączne i znaleźć do tego podziału trójkę punktów tak, żeby przy przemieszczaniu tej trójki jako sztywnego układu punktów po sferze mieć zawsze po jednym punkcie w A, B i C? Podobne zadanie dla dwóch zbiorów i pary punktów daje się łatwo rozwiązać — przemieszczaną parą punktów jest wtedy para punktów antypodycznych.

H. Steinhaus (Wrocław)

18. Niech $t = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(t)/2^k$, gdzie $0 < t < 1$ i $\varepsilon_k(t) = 0$ lub 1 dla $k = 1, 2, \ldots$, będzie rozwinięciem liczby t na ułamek dwójkowy. Niech $s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(t)$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Wykazać, że dla prawie wszystkich t istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{s_m(t) - \frac{m}{2}}{m} \right)^2$$

i jest niezależna od t.

P. Erdös (Budapeszt)

19. Czy istnieje rodzina prostych pokrywających płaszczyznę taka, że zbiór punktów płaszczyzny pokrytych przez więcej niż jedną prostą z tej rodziny jest łukiem?

A. Lelek (Wrocław)

20. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n nieparzystych, jako też parzystych, dla których liczba $2^{2^n}+3$ jest złożoną.

W. Sierpiński (Warszawa)

21. Dowieść, że każda z liczb ciągu nieskończonego

$$2^{2^2}-3, \quad 2^{2^{2^2}}-3, \quad 2^{2^{2^{2^2}}}-3, \ldots$$

jest złożoną.

W. Sierpiński (Warszawa)