ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE III (1959)

wmptm 1897



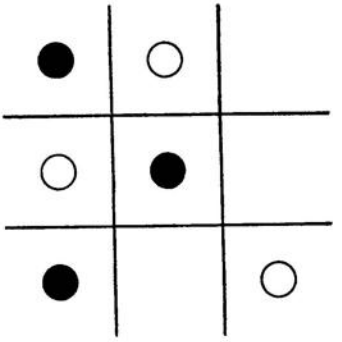
Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

H. STEINHAUS (Wrocław)

Gry

Gra jest walką i zabawą równocześnie. Walka jest udziałem zwierząt i ludzi, a zabawa, która nam towarzyszy od kolebki do starości, zwierzęciu też nie jest obca. Podwójny charakter gry przemawia do instynktu i nie ma cywilizacji bez gier. Nie jest to przypadek, że w pięciu głównych językach europejskich to samo słowo oznacza „grać" co „bawić się", a w polskim „gry" poprzez „igrzyska" kojarzą się z „igraszkami".

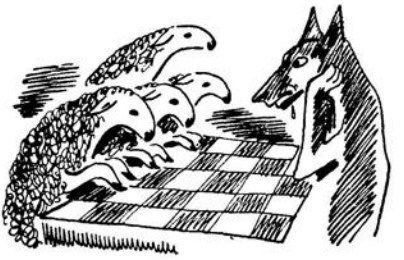
W tym artykule nie będziemy mówić o grach, w których zręczność fizyczna ma główną rolę. Spośród gier umysłowych popularnością cieszy się u dzieci szubienica, czyli młynek (rys. 1). Mamy tu na myśli pole z 9 kwadratów, na których partnerzy stawiają na przemian krążki (białe i czarne), a następnie posuwają; wygrywa ten, kto pierwszy ustawi swoje krążki w jednej linii. W tej grze powinien zawsze zwyciężyć zaczynający — nie trudno podać taki sposób postępowania, który mu zagwarantuje zwycięstwo, cokolwiek by czynił przeciwnik. Gdy jednak dodamy regułę zakazującą zaczynającemu zająć z samego początku środkowe pole, to gra nie doprowadzi do rozstrzygnięcia, jeżeli obaj partnerzy będą się trzymali właściwych taktyk, które też łatwo sformułować. Należy to tak rozumieć, że każdy partner, który nauczy się taktyki właściwej dla jego koloru (zaczyna biały, jego przeciwnik jest czarny), zapewni sobie co najmniej remis bez względu na to, jak zechce grać przeciwnik — „co najmniej", to znaczy, że wyuczony partner nie przegra w żadnym razie, a może wygrać, jeżeli przeciwnik popełni błędy.



Rys. 1

Znana powszechnie gra w „wilka i owce" (rys. 2) na zwykłej szachownicy należy do tej samej kategorii co szubienica: tu też istnieje

taktyka, łatwa do sformułowania, gwarantująca białym owcom, że złapią czarnego wilka. Toteż tylko dzieci, dla których zapamiętanie owej taktyki przedstawia trudności, mają przyjemność z tej gry, zwłaszcza gdy grają owcami przeciw dorosłemu wilkowi. W Warszawie ulepszono klasyczną szubienicę: na arkuszu kratkowanym X i Y na przemian wpisują po znaczku w kratki: X krzyżyk, zaś Y kółko. Kto pierwszy ustawi 5 swoich znaków w jednym wierszu, w jednej kolumnie, lub na przekątni, wygrywa. Podobno już ta gra nie jest banalna.



Rys. 2

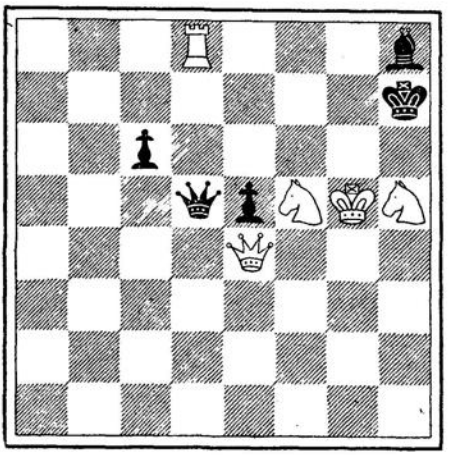
W świecie gier prym wiodą szlachetne szachy, jedna z najstarszych i najbardziej rozpowszechnionych gier, typowy przykład rozrywki umysłowej. Wygląd figur jest dowodem wojennej genezy szachów. Jest to gra przemienna: przeciwnicy posuwają figury na przemian. Pozycja początkowa jest w każdej partii ta sama i zawsze zaczynają białe. W teorii gier szachy zalicza się do gier o zupełnej informacji: pozycja początkowa zawiera wszystko, co ma jakiekolwiek znaczenie dla białych i ich taktyki; gdy białe zmienią pozycję przez swoje posunięcia, nowa pozycja znowu zawiera wszelką informację, która może mieć znaczenie dla czarnych i wpływ na ich decyzję, która się objawi za chwilę jako posunięcie. Każda partia kończy się tak zwanym *matem*, czyli pojmaniem króla, co oznacza przegraną dla strony pojmanego, lub też nierozegraną (*remis*).

Podczas gdy zwycięstwo jest określone niedwuznacznie, można mieć wątpliwości co do reguł określających remis, czyli nierozegraną, w podręcznikach gry w szachy. Niektóre z nich nasuwają następujące pytanie: czy można wyobrazić sobie taką partię szachową, w której żaden cykl kolejnych sytuacji nie powtarza się bezpośrednio po sobie, a która trwa bez końca. Może to pytanie będzie zrozumialsze, gdy je trochę zmienimy i co do treści i co do formy: czy można określić takie nieskończone następstwo cyfr 0, 1, 2, żeby żadna para, żadna trójka, żadna czwórka itd. nie powtarzała się bezpośrednio po sobie? Odpowiedź jest pozytywna. W dalszym ciągu będziemy uważali, że reguły szachów tak ustalono, iż każda partia doprowadza po pewnej liczbie posunięć do takiej pozycji, którą przepisy pozwalają określić jako zwycięstwo białych, jako zwycięstwo czarnych, albo też jako remis, przy czym żadna pozycja szachowa nie należy nigdy do więcej niż jednej z tych kategorii.

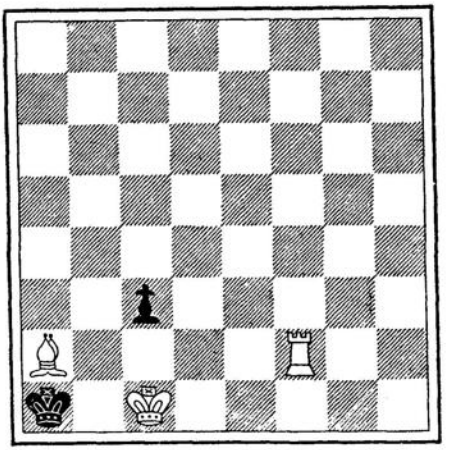
Jest wiele czasopism i książek podających zadania szachowe; takie zadanie składa się z diagramu podającego pozycję i z podpisu: białe

zaczynają i dają mata w... posunięciu — zależnie od tego, czy zamiast kropek napisano „2-gim", „3-cim", ... itd., zadanie jest dwuchodówką, trójchodówką, etc. Dwuchodówka żąda od czytelnika, żeby podał takie posunięcie białych, które na dowolną odpowiedź czarnych umożliwia znalezienie białego posunięcia matującego. Będzie to zrozumialsze, jeżeli wprowadzimy nieużywaną nazwę „jednochodówki" na taką pozycję, w której białe mogą w jednym posunięciu dać mata. Wtedy dwuchodówka będzie taką pozycją, która po pewnym posunięciu białych i dowol-

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego



Rys. 3. J. Mikusiński. Białe zaczynają i matują w dwóch posunięciach



Rys. 4. M. Hogrefe (Deutsche Schachzeitung 1927). Białe zaczynają i matują w trzech posunięciach

nej odpowiedzi czarnych zamienia się na jednochodówkę. To określenie dwuchodówki wskazuje, jak określić trójchodówkę: jest to taka pozycja, w której istnieje białe posunięcie, które po dowolnej czarnej odpowiedzi tworzy dwuchodówkę. Podobnie określamy 4-chodówkę itd., ogólnie mówiąc n-chodówkę (n dowolna liczba naturalna). Wszystkie n-chodówki ($n = 1, 2, 3, \ldots$) nazwiemy *końcówkami* z punktu widzenia białych. Jest jasne, że każda końcówka jest pozycją zwycięską dla białych w tym sensie, że istnieje taka taktyka, która je prowadzi z tej pozycji do zwycięstwa bez względu na obronę czarnych. Gdy określimy jeszcze końcówki z punktu widzenia czarnych, to będziemy mogli powiedzieć (analogicznie), że są one pozycjami zwycięskimi dla czarnych.

Przypuśćmy, że jakaś pozycja nie jest zwycięska dla białych. Nie jest ona wtedy także końcówką z ich punktu widzenia. Gdyby w tej pozycji istniało białe posunięcie takie, że po każdej odpowiedzi czarnych pozycja stawałaby się dla białych końcówką, np. co najwyżej 5-chodówką, to pozycja ta już przedtem byłaby końcówką dla białych

i to co najwyżej 6-chodówką. Ogólniej możemy powiedzieć, że gdyby w danej pozycji istniało białe posunięcie robiące po dowolnej czarnej odpowiedzi z niej końcówkę (z punktu widzenia białych), to już sama pierwotna pozycja byłaby końcówką. Ale założyliśmy, że nie jest! Wobec tego do każdego posunięcia białych z tej pozycji istnieje odpowiedź czarna, która stwarza nową pozycję również nie będącą końcówką z punktu widzenia białych, a więc nie będącą dla nich zwycięską, tak jak poprzednia. Białe znajdą się zatem w sytuacji, która zasadniczo nie różni się od poprzedniej i cokolwiek teraz uczynią, czarne znajdą trafną odpowiedź. Istnieje zatem taktyka czarnych, która nigdy nie dopuści białych do końcówki, a więc tym bardziej do jednochodówki, i nigdy białe nie będą mogły dać mata. Ponieważ jednak każda partia musi się skończyć, więc skończy się zwycięstwem czarnych lub nierozegraną.

Zajmijmy się teraz pozycją początkową z zwykłej grze. Nie wiemy czy jest ona zwycięska dla białych. Jeżeli jest, to istnieje taktyka białych gwarantująca im zwycięstwo. Jeżeli nie jest, to istnieje taktyka czarnych gwarantująca im co najmniej remis. Ten drugi przypadek dzieli się na dwa. Albo do każdego pierwszego białego posunięcia istnieje czarne, tworzące pozycję zwycięską dla czarnych, a wtedy czarne mogą wygrać każdą partię bez względu na to, co zrobią białe, byle czarne wybrały odpowiednią taktykę — albo też jest inaczej, a wtedy przy właściwej taktyce obu stron obie mogą być pewne, że uzyskają co najmniej remis. To znaczy, że każda bez względu na to, jak grać będzie druga, będzie miała pewność, że nie przegra, byle sama grała tak jak trzeba.

To, co tu napisaliśmy może zbyt szczegółowo, odnosi się nie tylko do szachów, ale i do wielu gier podobnego typu, np. do warcabów, do gry „Halma" i do gier tu wyżej wspomnianych. Sens jest następujący: Jeżeli sto demonów obdarzonych umiejętnością obmyślania dowolnie długich kombinacji szachowych i bezbłędnego analizowania wszystkich możliwych wariantów zasiądzie do 50 szachownic, to wynik na wszystkich szachownicach będzie ten sam: jeżeli na jednej wygrają białe, to na wszystkich, jeżeli czarne, to na wszystkich, a jeżeli na jednej będzie remis, to i na pozostałych partie skończą się nierozegraną.

Taka jest treść twierdzenia udowodnionego po raz pierwszy przez logika węgierskiego I. Kalmára, w latach 1928-29. Może się to wydać dziwne, że nie było ono znane żadnemu ze sławnych szachistów, których tylu umie wymienić historia tej gry. Nie wiedział o nim nawet Emanuel Lasker, mistrz świata z okresu poprzedzającego pierwszą wojnę światową, matematyk, który napisał nieciekawą książkę o grach. Pamiętajmy jednak, że twierdzenie Kalmára nie ma dotychczas znaczenia dla praktycznej gry: nie wiemy wcale, która z trzech możliwości wyżej wymie-

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

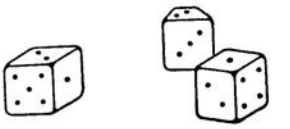
nionych naprawdę zachodzi w grze szachowej i gdybyśmy to wiedzieli, to jeszcze nie dałoby nam to znajomości właściwych taktyk, których istnienie udowodniono teoretycznie przed chwilą.

Na przykładzie „wilka i owiec" widać sens twierdzenia Kalmára, ale komplikacja gry szachowej i ogromne bogactwo możliwości, jakie się w niej mieszczą, uniemożliwia wskazanie właściwych, czyli bezbłędnych taktyk, które łatwo podać dla „wilka i owiec". Dzięki tej komplikacji szachy zapewne jeszcze przez długie wieki unikną zbanalizowania, odbierającego urok tamtej grze.

Może zainteresuje czytelnika fakt, że istnieją maszyny grające w szachy; wygrywają one przeciw partnerowi, który zna reguły tej gry od kilku dni, ale przegrywają przeciw każdemu przeciętnemu szachiście; kierują się one pewnymi zasadami taktycznymi, ale ich strategia nie obejmuje kombinacji sięgających dalej niż 3-cie posunięcie.

Jak może początkujący gracz zapewnić sobie rezultat 1 : 1 grając na dwóch szachownicach równocześnie przeciw dwom mistrzom? Nic łatwiejszego, jeżeli mistrz B gra białymi, mistrz C czarnymi, a początkujący A zasiada najpierw przeciw mistrzowi B. Gdy B posunie, A powtarza to białe posunięcie na drugiej szachownicy, czyniąc z niego swoje pierwsze posunięcie w partii przeciw C. Gdy C odpowie, A przenosi to czarne posunięcie na pierwszą szachownicę jako swoją odpowiedź na ruch mistrza B itd. Tym sposobem na obu szachownicach rozgrywa się ta sama partia, ale na pierwszej A reprezentuje czarną, a na drugiej białą stronę. Wobec tego jeżeli A przegra na jednej szachownicy, to wygra na drugiej i vice versa, a jeżeli uzyska remis na jednej to i na drugiej szachownicy. Tak więc zawsze zdobędzie razem 1 punkt ($1+0=1$, $0+1=1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$) i tyleż zdobędą razem jego przeciwnicy.

Mimo sławy, jaką szczyci się gra w szachy, jej popularność nie da się porównać z popularnością gier czysto hazardowych. Dawniej gra w kości cieszyła się powszechną wziętością, o czym świadczą takie zwroty, jak „kości zostały rzucone" lub łacińska *alea* (kostka do gry — rys. 5) w wyrazie *aléatoire* oznaczającym po francusku to samo, co po polsku „losowy". Przecież początki rachunku prawdopodobieństwa łączą się ściśle z grami hazardowymi, a do historii tego rachunku przeszło nazwisko gracza de Méré, który zaniepokoił się rzekomą sprzecznością między teorią a praktyką rzucania parą kostek, aż sam wielki Pascal wskazał mu błąd w rozumowaniu.



Rys. 5

Łatwo wymyślać gry hazardowe. Niech np. A i B mają stopery i niech każdy zatrzyma stoper w dowolnej pozycji, ale tak, żeby przeciwnik jej nie widział, a następnie niech porównają liczby na stoperach — kto

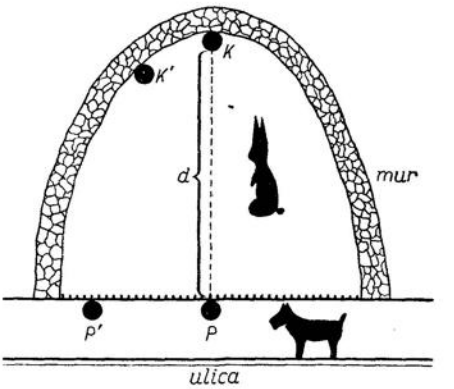
ma większą liczbę, otrzymuje od przeciwnika 1 złotego za każdą sekundę nadwyżki; przy tym różnica może wynosić co najwyżej 29 sekund; różnica 30 sekund liczy się za zero, a przy większej różnicy na korzyść A powiększa się o 60 pozycja B; tak np. gdy A ma 50 sekund, a B 15 sekund, to liczy się tak, jak gdyby B miał $60+15 = 75$ sekund: jest $75-50 = 25$ i B wygrywa 25 złotych. Widać tu od razu, że gra jest sprawiedliwa. Jest to gra *otwarta* i zaraz powiemy, co to znaczy. Jest jasne, że A musi się liczyć w każdej partii z przegraniem 29 złotych — wprawdzie nie zawsze przegra i nie zawsze 29 złotych, ale żadna pomysłowość nie da mu pewności, że nie przegra w najbliższej partii 29 złotych; na pewno nie przegra więcej. To samo odnosi się do B. Wyobraźmy sobie, że A jest skrupulatnym buchalterem, który przed przystąpieniem do partii notuje sobie w książeczce swój stan finansowy — notuje także *sperandę*, to jest wartość partii, która według umowy ma się za chwilę rozegrać. Otóż powinien zanotować minus 29 złotych jako sperandę — tak robi ostrożny kupiec, który przewiduje każdą ewentualność. Jeżeli B ma podobne zasady, to i on zanotuje minus 29 złotych jako wartość mającej się odbyć partii dla niego. Ale notatka -29 złotych w notesie partnera B oznacza wypłatę 29 zł na rzecz A i przedstawia się dla A jako $+29$ zł, to jest o 58 zł więcej z punktu widzenia A, niż kwota minus 29 zł zanotowana przez niego. Ta różnica 58 złotych jest miarą „otwartości" gry, lub — jeżeli ktoś woli — jej rozwartością.

Co to znaczy, wyjaśni się może, gdy podamy przykład gry zamkniętej. Niech końcówka szachowa będzie 10-chodówką, i to dokładnie 10-chodówką, to znaczy taką pozycją, w której białe (zaczynające) mogą zagwarantować, że dadzą mata czarnym nie później niż w 10 posunięciu, ale czarne mogą zagwarantować, że nie przegrają przed 10-tym posunięciem białych. Wyobraźmy sobie, że gra się o pieniądze i białe dostają od czarnych $10-k$ złotych, jeżeli mat nastąpi w k-tym posunięciu; tutaj k może się okazać większe od 10, a wtedy $10-k$ będzie liczbą ujemną; otóż umowę należy tak rozumieć, że wypłata kwoty minus q złotych na rzecz białych oznacza wypłatę q złotych przez białych na rzecz czarnych. Tak więc w przypadku mata w 12-tym posunięciu białe przegrają 2 złote; jeżeli dadzą mata w 8-ym, to wygrają 2 złote; wygrana białych w 10-tym posunięciu da każdej ze stron zysk 0. Jaka jest wartość partii dla białych przed rozegraniem? Jest zero, bo białe mają sposób gwarantujący im co najmniej zero, choć nie mają sposobu gwarantującego im zysk choćby nawet tylko 1 złotego, bo — jak wiemy — czarne mają taktykę gwarantującą im obronę co najmniej do 9 posunięcia białych włącznie, a więc gwarantującą im, że nie stracą więcej niż 0 złotych. Tu wartość buchalteryjna gry przed rozegraniem partii jest 0 dla każdego z dwóch partnerów, a zatem rozwartość gry jest zero. Gra jest *zamknięta*.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Jeszcze lepiej można zobaczyć różnicę między grami otwartymi a zamkniętymi na przykładzie psa, który spostrzegł królika w ogrodzie, oddzielonym sztachetami od ulicy i ograniczonym murem od reszty parceli. Pies biega wzdłuż sztachet po ulicy chcąc zbliżyć się jak najbardziej do królika, a królik chce stanąć jak najdalej od naszczekującego psa. Wyobraźmy sobie, że inteligencja tych zwierząt wystarcza do tego, żeby każdemu z nich można dać mapkę, aby mogło (w sekrecie przed nieprzyjacielem) wybrać sobie na niej pozycję najlepiej odpowiadającą jego tendencji. Rysunek 6 pokazuje pozycję psa P i królika K. Odległość PK jest d. Widać, że gdyby pies był wybrał stanowisko P', to ryzykowałby, że królik stanie w K, a odległość $P'K$ jest większa niż d. Wybór pozycji P gwarantuje psu zbliżenie się do królika co najmniej na d, a żaden inny wybór mu tego nie zapewnia. Królik nie może zapewnić sobie odległości większej niż d: jeżeli np. stanie w K', to musi się liczyć z tym, że pies wybierze pozycję P, a wtedy odległość będzie mniejsza od d. Ale królik może zapewnić sobie odległość co najmniej d wybierając pozycję K, a żaden inny wybór mu tego nie zapewni. Pozycje P i K na rysunku 6 pokazują zatem taki przebieg partii, że efektywnie każdy z przeciwników zrealizował tę wartość gry, którą mógł sobie zapewnić niezależnie od przeciwnika. Fakt, że zwierzęta mogły to zrobić równocześnie, jest dowodem zamkniętości gry. Zamkniętość ta wyraża się tu tym, że zwierzęta stojące w P i K nie mają ochoty się ruszyć: królik nie chce się ruszyć, bo każdy ruch zbliża go do psa, a pies stoi dlatego, że każdy ruch oddala go od królika.

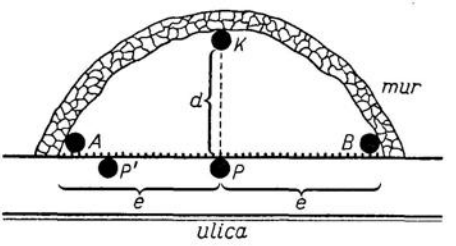


Rys. 6

W grach zamkniętych zawsze istnieją takie wzajemne taktyki, które odpowiadają rysunkowi 6. Partię graną według tych taktyk nazywamy *wariantem głównym*. Jest to walka ostrze na ostrze; w końcówkach szachowych autor zadania żąda od czytelnika właśnie znalezienia wariantu głównego — długość partii tak granej figuruje pod diagramem.

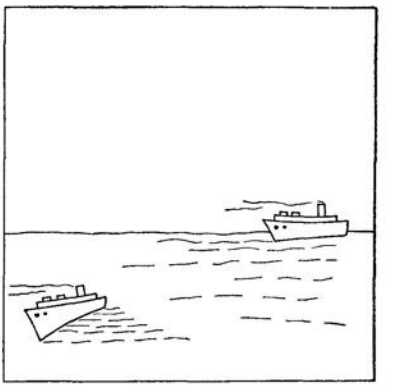
Inny będzie przebieg awantury między psem a królikiem, gdy ogród ma taki kształt jak na rysunku 7. Pies musi się liczyć z tym, że królik zechce stanąć w jednym z punktów A lub B; jeżeli pies wybierze stanowisko P, to zagwarantuje sobie w najgorszym razie odległość e, ale mniejszej nie może sobie zapewnić; gdyby stanął w P' naraziłby się na

możliwość wyboru pozycji B przez królika, a $P'B$ jest większe niż e. Królik może sobie zagwarantować odległość d w pozycji K. Gdziekolwiek stanie jego wróg, nie zdoła zredukować odległości poniżej d. Ale teraz te gwarantowane odległości e i d są różne: e jest większe niż d i różnica $e-d$ jest rozwartością gry; okazało się że drugi ogród prowadzi do gry otwartej. Co się stanie, gdy zwierzęta znajdą się na stanowiskach gwarantujących każdemu z nich „wartość gry", a więc gdy pies stanie w P, a królik w K? Pies będzie zadowolony ze swojego szczęścia w grze, bo liczył się z odległością e, a zbliżył się na odległość d. Ale jego satysfakcja nie potrwa długo. Królik spostrzeże, że przez ucieczkę do rogu A zwiększy odległość z d na e; gdy to uczyni, pies ruszy w kierunku A, a królik pobiegnie wzdłuż muru do B, pies pośpieszy za nim wzdłuż sztachet i rozpocznie się gonitwa. Widzimy, że tutaj nie ma pozycji wzajemnej równowagi. Brak takiej pozycji jest charakterystyczny dla gier otwartych.



Rys. 7

Gdy jeden lub więcej okrętów ściga na morzu wrogi statek, rozgrywa się partia gry, którą trudno nazwać zabawą, ale która najzupełniej podpada pod teorię gier omówioną tutaj na przykładach. Ograniczmy się do takiej uwagi: Gdy jeden statek ściga inny na pełnym morzu i każdy wie, w jakim kierunku znajduje się przeciwnik, to gra pościgowa jest zamknięta, gdy jednak pościg odbywa się blisko brzegu, to gra jest otwarta i zamienia się na zamkniętą dopiero wtedy, gdy okręty znają nie tylko kierunek, ale i odległość wzajemną.

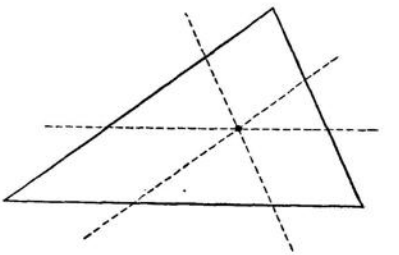

Rys. 8

Podajmy jeszcze jeden przykład gry zamkniętej. Placek ma kształt trójkąta. A i B mają się nim podzielić; przy tym A ma prawo zaznaczyć dowolny punkt P na placku, a B ma potem sobie odciąć swoją część prostym cięciem wiodącym przez P. Gra jest niesprawiedliwa, bo B zawsze może zdobyć co najmniej $^5/_9$ placka. Więcej nie zagarnie, gdy A wybierze środek ciężkości trójkąta za P; taki wybór jest najlepszą taktyką dla A, najlepszą dla B jest zawsze cięcie równoległe do jednego z boków — takich równoległych przez P jest trzy i B powinien wybrać sobie największy

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

z trzech trapezów. Gra jest zamknięta dlatego, że B może zapewnić sobie $^5/_9$ placka, ale nie może zapewnić sobie więcej, a A może się zabezpieczyć przed dopuszczeniem przeciwnika B do większej zdobyczy niż $^5/_9$ placka. Ten przykład pokazuje, że gry niesprawiedliwe mogą być zamknięte.

Nie mówimy o grze w orła i reszkę, ale jest pewna odmiana tej gry, która figuruje w wielu dawniejszych podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa pod nazwą „paradoksu petersburskiego". Gracz A wpłaca kwotę K złotych na rzecz gracza B, a następnie rzuca monetą dopóty, dopóki nie pojawi się orzeł. Gdy orzeł pojawi się za pierwszym razem, A otrzymuje 1 złotego, gdy dopiero za drugim, otrzymuje 2 złote, gdy dopiero za trzecim 4 złote itd. Każde opóźnienie orła podwaja wypłatę, którą A otrzyma od B wzamian za wstępną opłatę K-złotową. Pytanie brzmi: Jak należy ustalić K, żeby gra stała się sprawiedliwa? Do tego trzeba obliczyć, jak często zdarza się, że orzeł pojawi się zaraz za pierwszym razem. Wiadomo, że średnio dzieje się to w co drugiej partii. Z tego wynika, że 50% partii skończy się za pierwszym rzutem i średni zysk partnera A wyniesie z tego tytułu 50 groszy. Ale pozostaje ewentualność, że padnie za pierwszym rzutem reszka, a wtedy za drugim padnie orzeł lub reszka; ponieważ równie często pada orzeł jak reszka, więc w połowie partii, które zaczęły się od reszki, padnie za drugim rzutem orzeł. Wynika stąd, że 25% partii skończy się w drugim rzucie. Wtedy jednak A otrzymuje 2 złote, a 25% z 2 złotych jest 50 gr. Rozumując dalej w podobny sposób otrzymujemy $50\,\text{gr} + 50\,\text{gr} + 50\,\text{gr}\ldots$ jako średnią wartość partii dla gracza A. To jest nieskończenie dużo i warto za taką obietnicę zapłacić nawet 100 złotych i więcej. A jednak jest niewiele osób, które zaryzykowałyby w roli A w tym hazardzie większe K niż 100 złotych! Tę sprzeczność między rachunkiem a psychiką gracza nazwano *paradoksem petersburskim* (może dlatego, że zajmował się nim Daniel Bernoulli podczas swego pobytu w Petersburgu, dokąd zaprosiła go ze Szwajcarii Katarzyna II). Gra petersburska nie da się zamienić na sprawiedliwą przez dobranie stałego K, ale można ją uwolnić od paradoksu przez odpowiednie zmienianie K, tak żeby opłata wstępna mogła być różna w następujących po sobie partiach. (Nie zapominajmy, że każda partia z osobna składa się z nieokreślonej liczby rzutów. Kończy się dopiero, gdy wyjdzie orzeł). Wystarczyłoby np., żeby ta opłata wynosiła kolejno 1, 2, 4, 1, 2, 1, 8, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 16,... Wtedy opłata 1 pojawiałaby się średnio w 50% partii, opłata 2 w 25% partii, opłata 4



Rys. 9

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

w 12,5% partii itd. Ponieważ wygrane kwoty pojawiają się też właśnie z tymi częstościami, więc gra jest sprawiedliwa, a gracz A nie odczuwa nakazu płacenia od czasu do czasu dużych opłat wstępnych, bo wygrywa też od czasu do czasu kwoty tej samej wielkości.

Jest rzeczą bardzo ciekawą, że pojawiły się propozycje wprowadzenia losu do gier rozumowych i to nie tylko dla urozmaicenia tych gier. Dawniej, przed pierwszą wojną światową, sztaby generalne urządzały tak zwane gry wojenne dla wyszkolenia dowódców w operacjach wojennych bez ponoszenia wielkich kosztów połączonych z manewrami. Generałowie przesuwali po mapach krążki wyobrażające pułki piechoty lub kawalerii, oddziały taboru i baterie artylerii ciężkiej lub zwykłej, a reguły wzięte z doświadczenia ustalały, czy np. w terenie płaskim dwa szwadrony kawalerii poparte przez baterię artylerii mogą rozbić batalion piechoty, czy też muszą mu ustąpić pola. W moich wspomnieniach sprzed 30 lat pozostało nazwisko prawnika R. Tennera, który miał pomysł wprowadzenia losu dla upodobnienia gry wojennej do rzeczywistej bitwy. Jeżeli mianowicie doświadczenie pozwala oszacować w powyższej utarczce szansę zwycięstwa piechoty na mniej więcej dwa razy wyższą od szansy kawalerii, to należy kostce oznaczonej barwą kawalerii na dwóch ścianach a barwą piechoty na czterech powierzyć decyzję o skutkach bitwy dla stron.



Rys. 10

Wróćmy do gier otwartych. Każda partia takiej gry jest przedsięwzięciem hazardowym, tym ryzykowniejszym, im większa jest rozwartość gry. Gdyby można się asekurować przeciw skutkom partii, to taka asekuracja byłaby kosztowna. Jeżeli jednak obie strony asekurują się w tym samym przedsiębiorstwie, to koszta asekuracji mogą poważnie zmaleć. To prowadzi dosyć naturalną drogą do pomysłu, żeby gracz asekurował się sam u siebie. Ryzyko jego w jednej partii nie da się zmniejszyć, ale jeżeli tych partii będzie więcej, to posługiwanie się różnymi taktykami w kolejnych partiach może zmniejszyć rozwartość gry traktowanej jako średnia wielu rozgrywek.

Spróbuję te niezbyt jasne wywody uwypuklić na przykładzie gracza, który dysponuje drużyną złożoną z 10 podległych mu graczy, podobnie jak jego przeciwnik. Może on wyznaczyć różne taktyki każdemu ze swoich ludzi i jego przeciwnik może — jeżeli zechce — zrobić to samo, ale podwładni muszą się trzymać stale danych im poleceń. Turniej odbędzie się według zasady „każdy z każdym", a więc będzie 100 partii zwy-

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

kłych. Kapitanowi drużyny *A* przypadnie jako rezultat całego turnieju średnia z 100 wyników uzyskanych przez członków jego drużyny, a w podobny sposób obliczy się rezultat kapitana *B*. Okaże się, że rozwartość nowej, zbiorowej gry, to jest granej osobiście przez obu kapitanów, będzie nieznaczna. Gdy zamiast drużyn dziesiątkowych wprowadzimy większe, np. dwudziestkowe, rozwartość stanie się jeszcze mniejsza. Będzie ją można dowolnie zmniejszyć przez zwiększenie drużyn. Dzięki temu kapitan *A* będzie mógł sobie zapewnić — niezależnie od taktyki *B* — lepszy wynik średni, niż w grze indywidualnej.

Praktycznie można dwojako wyzyskać to, co wyżej powiedziano. W takich walkach jak operacje wielu torpedowców przeciw wielu łodziom podwodnym można uważać każdą stronę za drużynę i bezpośrednio zastosować wyłożoną przed chwilą zasadę „mieszanych strategii" (nazwy tej używają niektórzy autorowie). W otwartych grach indywidualnych graczy, które składają się z serii partii, gracz może stosować inną taktykę w każdej partii i polepszyć przez to średni wynik, podobnie jak to dało się zrobić przez wprowadzenie drużyn.

Teraz staje się zrozumiałe tak zwane fundamentalne twierdzenie J.v. Neumanna, udowodnione niezbyt dawno, że każdą grę dwuosobową można domknąć przez wprowadzenie strategii mieszanych (nasz sposób wyjaśnienia sensu tego twierdzenia opiera się na spostrzeżeniu Ryll-a-Nardzewskiego dotyczącym gier drużyn ugrupowanych w pary). Praktyczny sens domykania streszcza się w tym, że daje ono partnerom wyższą gwarancję, eliminując wpływ hazardu.

Samo zagadnienie grupowania w pary jest ciekawe także z innego punktu widzenia, a mianowicie wtedy, gdy porzuca się zasadę gry „każdy z każdym". Gdy np. klub szachowy wysyła reprezentację złożoną z 8 graczy na jeden dzień do innego ośrodka na spotkanie z 8-ma tamtejszymi graczami, to jest słuszne, by spotkania przedpołudniowe odbyły się na 8 szachownicach według wyboru partnerów przez kapitana przyjezdnych, a popołudniowe według wyboru kapitana miejscowego. Przed rozpoczęciem rannej gry obie listy zostają ujawnione, ale sporządzono je sekretnie. Powstaje trudne zagadnienie, jak powinni kapitanowie, którzy znają swoich i obcych szachistów z poprzednich turniejów i rozgrywek eliminacyjnych, wyzyskać swoją wiedzę w interesie swoich drużyn. Postawmy konkretne pytanie: Siła graczy przyjezdnych jest 7, 7, 6, 5 ,5, 4, 3, 3, a miejscowych 9, 9, 8, 6, 4, 2, 1, 1. Te liczby rozumiemy w taki sposób: gdy gracz 7 spotka się z przeciwnikiem 4, to ich szanse są 7 : 4. Jak ma ugrupować pary kapitan przyjezdnych, a jak miejscowy? Nie znamy odpowiedzi, a nawet nie wiemy, czy założenia odpowiadają realnej sytuacji.

Bogactwo królestwa gier jest nieprzejrzane. Przed kilku laty wymyślono we Wrocławiu taką grę: Osoby zebrane w pokoju składają po 1 zł

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

i każda pisze na karteczce (niewidocznie dla innych) wysokość pokoju w centymetrach. Potem zbiera się karteczki, sumuje liczby i oblicza średnią — czyja liczba jest najbliższa tej średniej, ten wygrywa całą pulę. Grze tej można zarzucić to, że niepotrzebnie mówi się tu o wysokości pokoju, skoro nie ma żadnego związku między prawdziwą wysokością a wynikiem partii. Rzeczywiście, reguły tej gry dają zupełną swobodę piszącym, co uniemożliwia teoretycznie jej rozwiązanie, ale każdy gracz będzie się liczył z tym, że niektórzy napiszą jednak swoją ocenę wysokości pokoju. Wobec tego niekorzystnie byłoby zbytnio oddalać się w wyborze od tej wysokości, a raczej od tej wielkości, którą większość uważa za prawdziwą wysokość. Ta psychologiczna komplikacja sprawia, że gra staje się interesująca, bo wygrywa ten, kto wie, jakie błędy popełniają inni przy ocenie wysokości pokoju. Dlatego można grę wrocławską porównać z totalizatorem. Tam nie wystarczy znać się na koniach, trzeba także znać się na ludziach. Konie można — z grubsza — podzielić na cztery klasy: 1) dobry koń, który ma niewielu zwolenników, 2) dobry koń, który ma wielu zwolenników, 3) zły koń, który ma niewielu zwolenników, 4) zły koń, który ma wielu zwolenników. Ponieważ kwota wygrana zależy nie tylko od tego, który koń dojdzie do mety przed innymi, ale i od tego, ile osób na niego postawiło, bo im koń jest mocniej obstawiony, tym mniejsza wypłata, więc najlepiej stawiać na konie klasy 1), najgorzej na konie klasy 4), a konie klas 2) i 3) dają graczowi pośrednią szansę. Oczywiście trafnie sklasyfikować konie według powyższego podziału może tylko taki bywalec wyścigów, który zna nie tylko walory koni, ale także upodobania, przesądy i rozumowania publiczności grającej.

Dla odmiany podamy teraz grę zupełnie ściśle określoną. Gracze A i B piszą na przemian na wspólnej kartce cyfry zupełnie dowolne (czytelnikowi przyzwyczajonemu do języka gazet przypominamy, że cyfra to nie jest liczba!), z których utworzy się następstwo takie jak np. 109 735628555900114352... Jeżeli na początku dopiszemy 0, to będziemy mogli całość przeczytać jako liczbę ułamkową (z przedziału 01). A wygra, jeżeli liczba będzie wymierna. Tutaj budzi się wątpliwość, jak można doprowadzić partię do rozstrzygnięcia, skoro obydwaj partnerzy muszą dopisywać coraz dalsze cyfry. Otóż na to jest rada: zamiast pisać cyfry na wspólnej kartce, każdy partner napisze na własnej kartce (niewidocznie dla przeciwnika) swoją taktykę. Na przykład A napisze: będę stawiał zawsze cyfrę o 1 większą od ostatnio napisanej, a jeżeli to będzie niemożliwe, napiszę 7. B napisze na przykład: będę stawiał jedynki, z tym wyjątkiem, że jeżeli A napisze 1, to ja napiszę 5. Teraz pokazują kartki matematycznemu arbitrowi, aby orzekł, czy liczba przez nie określona jest wymierna, czy nie. Łatwo wykazać, że w przykładzie tu poda-

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

nym wygrał *A*. *B* okazał się złym graczem, bo można udowodnić, że gra jest niesprawiedliwa: istnieje taktyka zapewniająca zwycięstwo graczowi *B*. Jest nią mianowicie pisanie przez *B* po kolei wszystkich cyfr rozwinięcia liczby niewymiernej, np. $\sqrt{2}$. Opisana tu gra jest najprostszym przykładem całej klasy gier matematycznych, którą odkryli S. Banach i S. Mazur, gdy jeszcze nowoczesna teoria gier nie była znana.

Pominęliśmy gry wieloosobowe. W takich grach najciekawsze jest zagadnienie koalicji, to jest grup, które słuchają rozkazów komendanta i dzielą się wygraną według omówionych reguł wewnętrznych, respektując jednak ogólne zasady gry. Teorię koalicji uważają matematycy za najtrudniejsze zagadnienie teorii gier.

Są gry, w których partnerem jest człowiek grający przeciw otoczeniu, które nie musi być jednostką myślącą i świadomą tego, że jest w antagonizmie do człowieka. Nazwijmy to otoczenie naturą. Będzie zatem taką grą wyprawa na niedostępny szczyt górski. Wolimy inny przykład: wnioskowanie ze zbadania 25 butelek wybranych z wagonu, zawierającego 10000 sztuk — ile jest całych, a ile pękniętych w owym transporcie. Przypuśćmy, że było 20 całych a 5 pękniętych w próbce. Gra idzie o to, żeby odgadnąć możliwie dokładnie skład wagonu: wyobraźmy sobie, że naturze, która kazała niektórym butelkom pęknąć przy wydmuchiwaniu ich w hucie, zależy na tym, żeby nas wprowadzić w błąd, tak jakby jej ktoś płacił kwoty pieniężne proporcjonalne do kwadratu różnicy między prawdziwą a odgadniętą liczbą pękniętych butelek. Jeżeli jeszcze wyobrazimy sobie, że to z naszej kieszeni idzie ta zapłata, to już sens tej gry stanie się jasny. Jest ona najwidoczniej otwarta. Bo my wiemy tylko, że jest w transporcie co najmniej 20 całych a co najmniej 5 pękniętych butelek, a więc, że liczba pękniętych butelek leży między 5 a 9980, ale w tych granicach ma natura swobodę. Jeżeli odgadniemy skład szczęśliwym trafem, natura wygra 0, więc nic nie może jej zagwarantować większej wygranej jak zero. Jeżeli oszacujemy liczbę pękniętych butelek na 4992,5 (średnia z 5 i 9980), to omylimy się co najwyżej o 4990 i przegramy 4987 złotych 50 groszy — nic gorszego stać się nam nie może, ale też żaden statystyk nie nauczy nas sposobu szacowania, który by nam zagwarantował lepszy rezultat. Różnica $4987{,}5 - 0 = 4987{,}5$ jest rozwartością gry. Jak ją zamknąć, aby zmniejszyć nasze ryzyko? Zgodnie z ideą twierdzenia fundamentalnego v. Neumanna wyobraźmy sobie, że nadjeżdżają coraz to nowe wagony butelek i że naturze wolno nadawać każdemu wagonowi dowolny skład. My pobieramy z każdego wagonu 25-sztukową próbkę i wolno nam szacować skład wagonu na podstawie próbki, a natura zmienia skład transportów tak, jakby znała teorię gier. Odpowiedź jest następująca: jeżeli w próbce

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

z 25 butelek jest m pękniętych, to w wagonie jest $(m+2{,}5)30^{-1}\cdot 10000$ pękniętych butelek.

Jak było do przewidzenia, znaczna część naszego tematu znalazła się poza obrębem niniejszej pogadanki. Może ten defekt zachęci czytelników do bliższego zapoznania się z nauką o grach za pośrednictwem specjalnych dzieł jej poświęconych. (Por. H. Steinhaus, *McKinsey o grach*, Prace Matematyczne 2 (1958), str. 234-254. Jest to recenzja książki: J. C. C. McKinsey, *Introduction to the theory of games*, New York 1952). Książka *Théorie des jeux et programmation linéaire* (Dunod, Paris 1959), której autorem jest S. Vajda, prowadzi czytelnika od teorii gier do zagadnień tak zwanego programowania liniowego — jest to dziedzina o dużym znaczeniu praktycznym, np. w planowaniu ekonomicznym.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego