ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE III (1959)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

O rozkładach na sumę pięciu sześcianów

W pracy podano elementarny dowód twierdzenia, że *każda liczba całkowita jest na nieskończenie wiele sposobów sumą pięciu sześcianów liczb całkowitych.*

Łatwo sprawdzić tożsamość

$$6t = (t+1)^3+(t-1)^3+(-t)^3+(-t)^3, \tag{1}$$

z której wynika natychmiast, że każda liczba całkowita podzielna przez 6 jest sumą czterech sześcianów liczb całkowitych.

Aby udowodnić to, że każda liczba całkowita jest na nieskończenie wiele sposobów sumą pięciu sześcianów liczb całkowitych, wystarczy wykazać, że od każdej liczby całkowitej można odjąć dowolnie wielki sześcian tak, żeby różnica była podzielna przez 6.

Niech więc c będzie daną liczbą całkowitą. Liczba c przy dzieleniu przez 6 daje jedną z reszt 0, 1, 2, 3, 4, 5. Mamy więc do rozróżnienia sześć przypadków:

$$c = 6k, \quad c = 6k+1, \quad c = 6k+2,$$
$$c = 6k+3, \quad c = 6k+4, \quad c = 6k+5,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą.

Niech n oznacza dowolną liczbę naturalną. Mamy

$$6k-(6n)^3 = 6(k-6^2n^3),$$
$$6k+1-(6n+1)^3 = 6(k-6^2n^3-18n^2-3n),$$
$$6k+2-(6n+2)^3 = 6(k-6^2n^3-6^2n^2-12n-1),$$
$$6k+3-(6n+3)^3 = 6(k-6^2n^3-2\cdot 3^3n^2-3^3n-4),$$
$$6k+4-(6n-2)^3 = 6(k-6^2n^3+6^2n^2-12n+2),$$
$$6k+5-(6n-1)^3 = 6(k-6^2n^3+18n^2-3n+1).$$

Oznaczając więc w sześciu naszych przypadkach przez m odpowiednio liczbę $6n$, $6n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n-2$, $6n-1$, w każdym z tych przypadków przy całkowitym t będziemy mieli $c-m^3 = 6t$, skąd wobec (1)

$$c = m^3+(t+1)^3+(t-1)^3+(-t)^3+(-t)^3,$$

przy czym dla odpowiedniego n, m może być liczbą naturalną dowolnie wielką. Żądany dowód został więc przeprowadzony.

Co do rozkładów liczb całkowitych na sumę czterech sześcianów liczb całkowitych, to istnieje przypuszczenie, że każda liczba całkowita ma nieskończenie wiele takich rozkładów. Przypuszczenie to zostało sprawdzone dla wszystkich liczb naturalnych $\leqslant 350$, poza liczbami 148 i 284 (zob. [1] i [2]), i dla nieskończenie wielu innych.

Natomiast łatwo jest dowieść, że żadna liczba całkowita, dająca przy dzieleniu przez 9 resztę 4 lub 5, nie jest sumą trzech sześcianów liczb całkowitych. Nie obalono dotąd przypuszczenia, że każda liczba całkowita, która przy dzieleniu przez 9 daje resztę inną niż 4 i 5, jest na nieskończenie wiele sposobów sumą trzech sześcianów liczb całkowitych. O liczbach 0, 1 i 2 potrafimy dowieść, że są na nieskończenie wiele sposobów sumami trzech sześcianów liczb całkowitych, ale dla liczby 3 dowodu takiego nie znamy. Nie znamy żadnego rozkładu liczby 30 na sumę trzech sześcianów liczb całkowitych i nie potrafimy rozstrzygnąć, czy taki rozkład istnieje. Pewne wiadomości o rozkładach liczb na sumy sześcianów podałem w pracy [3], na str. 61-63.

Prace cytowane

[1] A. Schinzel et W. Sierpiński, *Sur les sommes de quatre cubes*, Acta Arithmetica 4 (1958), str. 20-30.

[2] A. Mąkowski, *Sur quelques problèmes concernant les sommes de quatre cubes*, Acta Arithmetica 5 (1959), str. 121-123.

[3] W. Sierpiński, *Co wiemy, a czego nie wiemy o rozkładach liczb naturalnych na sumy kwadratów, sześcianów oraz bikwadratów*, Prace Mat. 2 (1956), str. 56-64.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego