ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE III (1959)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

O pewnym zbiorze płaskim

Celem niniejszego artykułu jest dowód następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE. *Jeżeli zbiór płaski Z ma skończoną $\geqslant 0$ liczbę punktów na każdej prostej, równoległej do osi rzędnych, to istnieje tylko skończona $\geqslant 0$ liczba prostych, równoległych do osi odciętych, na których leży co najwyżej przeliczalna mnogość punktów nienależących do zbioru Z.*

Dowód. Przypuśćmy, że Z jest zbiorem płaskim i że istnieje nieskończenie wiele prostych, równoległych do osi odciętych, na których leży co najwyżej przeliczalna mnogość punktów nie należących do Z. Istnieje więc ciąg nieskończony takich prostych, na przykład $y = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, gdzie a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ są różnymi liczbami rzeczywistymi. Niech T_n oznacza zbiór punktów nie należących do zbioru Z i leżących na prostej $y = a_n$. Każdy ze zbiorów T_n $(n = 1, 2, \ldots)$ jest więc co najwyżej przeliczalny, a więc i zbiór $T = T_1 + T_2 + \ldots$ jak też i jego rzut P na oś odciętych są co najwyżej przeliczalne. Ponieważ zbiór wszystkich punktów osi odciętych jest, jak wiadomo, nieprzeliczalny, więc istnieje punkt $(x_0, 0)$ osi odciętych nie należący do P, a więc nie będący rzutem żadnego z punktów zbioru T. Wynika stąd, że dla $n = 1, 2, \ldots$ prosta $y = a_n$ przecina prostą $x = x_0$ w punkcie (x_0, a_n) należącym do Z. Prosta $x = x_0$ równoległa do osi rzędnych przecina więc zbiór Z w nieskończenie wielu punktach (x_0, a_n) $(n = 1, 2, \ldots)$, wbrew własności zbioru Z. Twierdzenie nasze zostało więc udowodnione.

Wynika z niego natychmiast następujący

WNIOSEK. *Płaszczyzna nie jest sumą dwóch zbiorów, z których jeden byłby skończony na każdej równoległej do osi rzędnych, a drugi byłby co najwyżej przeliczalny na każdej równoległej do osi odciętych.*

Łatwy jest natomiast dowód twierdzenia, że *zbiór wszystkich punktów kratowych płaszczyzny (tj. wszystkich punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych) jest sumą dwóch zbiorów, z których pierwszy jest skończony na każdej równoległej do osi rzędnych, a drugi jest skończony na każdej równoległej do osi odciętych.*

Dla otrzymania takiego rozkładu punktów kratowych wystarczy do pierwszego zbioru zaliczyć wszystkie punkty kratowe (x, y), gdzie $|x| \leqslant |y|$, zaś do drugiego zbioru wszystkie pozostałe punkty kratowe płaszczyzny, a więc takie, dla których $|y| < |x|$. Dowód tego, że składniki te mają żądaną własność, nie nastręcza trudności.

Można też dowieść, że zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o obu współrzędnych wymiernych jest sumą dwóch zbiorów, z których jeden jest skończony na każdej równoległej do osi rzędnych, a drugi skończony na każdej równoległej do osi odciętych. Dla otrzymania takiego rozkładu wystarczyłoby do pierwszego zbioru zaliczyć wszystkie punkty $(1/m, r/s)$ (gdzie ułamki są nieprzywiedlne o całkowitych licznikach i naturalnych mianownikach) takie, że

$$|1| + m \leqslant |r| + s,$$

a do drugiego zbioru wszystkie pozostałe punkty płaszczyzny o obu współrzędnych wymiernych.

Można także dowieść, że zbiór wszystkich punktów przestrzeni trójwymiarowej o współrzędnych wymiernych jest sumą trzech zbiorów, z których każdy jest skończony na każdej prostej równoległej do jednej z osi współrzędnych.

Zauważymy tu, iż w nocie przedstawionej Akademii Umiejętności w Krakowie 24. II. 1919 r. dowiodłem, że twierdzenie: płaszczyzna jest sumą dwóch zbiorów, z których jeden jest co najwyżej przeliczalny na każdej równoległej do osi rzędnych, a drugi co najwyżej przeliczalny na każdej równoległej do osi odciętych, jest równoważne hipotezie continuum (ob. też [1], str. 179). Dowiodłem też ([2], str. 297), że hipoteza continuum jest równoważna twierdzeniu, że każdy zbiór płaski, nie będący mocy continuum, jest sumą dwóch zbiorów, z których jeden jest skończony na każdej równoległej do osi rzędnych, a drugi jest skończony na każdej równoległej do osi odciętych.

W roku 1951 dowiodłem, że hipoteza continuum jest równoważna twierdzeniu, że przestrzeń trójwymiarowa jest sumą trzech zbiorów, z których każdy jest skończony na każdej równoległej do jednej z osi współrzędnych ([3], str. 1046 oraz [4] str. 467).

Nie potrafimy natomiast rozstrzygnąć pytania: *czy istnieją na płaszczyźnie trzy proste* P_i $(i = 1, 2, 3)$ *takie, żeby płaszczyzna ta była sumą trzech zbiorów* Z_i $(i = 1, 2, 3)$ *takich, że dla* $i = 1, 2, 3$ *zbiór* Z_i *jest skończony na każdej prostej równoległej do prostej* P_i.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Prace cytowane

[1] W. Sierpiński, *Sur l'hypothèse du continu*, Fundamenta Mathematicae 5 (1924), str. 177-187.

[2] — *Sur une propriété des ensembles plans équivalente à l'hypothèse du continu*, Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège 1951.

[3] — *Une proposition de la géometrie élémentaire équivalente à l'hypothèse du continu*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris t. 232.

[4] — *Sur quelques résultats nouveaux concernant l'hypothése du continu*, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, ser. V, vol. X, Roma 1951.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego