ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: WIADOMOŚCI MATEMATYCZME III (1959)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

S. Rolewicz (Warszawa)

Uwagi o funkcjach o pochodnej zero

Niech X będzie przestrzenią liniowo-metryczną (tzn. przestrzenią metryczną, w której określone jest ciągłe działanie dodawania i działanie mnożenia przez liczbę rzeczywistą). Przez C_X oznaczymy przestrzeń funkcji ciągłych $x(t)$, określonych na odcinku $(0,1)$ i o wartościach z przestrzeni X. W podobny sposób jak dla zmiennej rzeczywistej zdefiniujemy pochodną (patrz np. [1], str. 277)

$$x'(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}.$$

Niech $f(x)$ będzie funkcjonałem liniowym określonym na przestrzeni X (tzn. funkcjonałem ciągłym takim, że $f(x+y)=f(x)+f(y)$ i $f(tx)=tf(x)$, gdzie t oznacza liczbę, x i y zaś oznaczają elementy przestrzeni X). Zbadajmy pochodną funkcji rzeczywistej $g(t)=f\big(x(t)\big)$. Na mocy liniowości funkcjonału

$$g'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f\big(x(t+h)\big)-f\big(x(t)\big)}{h}=\lim_{h\to 0} f\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right)=$$
$$=f\left(\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right)=f\big(x'(t)\big),$$

jeśli pochodna $x'(t)$ istnieje. Jeśli więc $x'(t)\equiv 0$, to pochodna funkcji rzeczywistej $g(t)$ jest równa 0 i funkcja $g(t)$ jest stała.

Zatem jeśli w przestrzeni istnieje totalna rodzina funkcjonałów liniowych $f_a(x)$ (tzn. że $f_a(x)=0$ dla każdego a pociąga $x=0$) i $x'(t)\equiv 0$, to wszystkie funkcje $g_a(t)=f_a\big(x(t)\big)$ są stałe i na mocy totalności rodziny $x(t)$ jest funkcją stałą. S. Mazur postawił pytanie, czy twierdzenie to jest prawdziwe, w przypadku gdy nie istnieje totalna rodzina funkcjonałów liniowych. Odpowiedź jest negatywna, co wynika z następującego przykładu.

Niech S oznacza zbiór wszystkich funkcji mierzalnych $x(\tau)$, określonych na odcinku $(0,1)$ z metryką (patrz [1], str. 26)

$$\varrho(x,y)=\int_0^1 \frac{|x(\tau)-y(\tau)|}{1+|x(\tau)-y(\tau)|}\,d\tau.$$

Niech $x(\tau)$ będzie dowolnym elementem S. Określimy teraz funkcję

$$x(t) = \begin{cases} x(\tau) & \text{dla} \quad \tau \leqslant t, \\ 0 & \text{dla} \quad t < \tau \end{cases}$$

($x(t)$ jest dla każdego t funkcją zmiennej τ). Jak łatwo wykazać

$$\varrho\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}, 0\right) \leqslant |h|,$$

więc $x'(t) \equiv 0$, lecz funkcja $x(t)$ nie musi być oczywiście stała.

We wszystkich znanych przykładach przestrzeni liniowo-metrycznych, w których nie istnieją nietrywialne funkcjonały liniowe, jak np. dla przestrzeni $N(L)$ (definicja i własności patrz [2] i [3]), można opierając się na powyższej konstrukcji wykazać, że dla każdego x istnieje taka funkcja $x(t)$, że $x(0) = 0$, $x(1) = x$ i $x'(t) \equiv 0$.

PYTANIE. Czy podana własność jest warunkiem koniecznym i dostatecznym nieistnienia funkcjonałów liniowych nietrywialnych?

Uwaga. Podany wyżej przykład daje się łatwo uogólnić na przypadek pochodnej zmiennej zespolonej.

Prace cytowane

[1] Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, Москва-Ленинград 1951.

[2] S. Mazur and W. Orlicz, *On some classes of linear spaces*, Stud. Math. 17 (1958), str. 97-119.

[3] S. Rolewicz, *Some remarks on spaces $N(l)$ and $N(L)$*, Stud. Math. 18 (1959), str. 1-9.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego