Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W nowym wydaniu usunięto przede wszystkim zajmujący sporo miejsca zbiór zadań; cięcie to jest zupełnie uzasadnione, ponieważ w międzyczasie ukazało się polskie tłumaczenie doskonałego i powszechnie używanego zbioru zadań Olgi Cuberbiller. Skreślono również niektóre mniej ważne ustępy (współrzędne kowariantne, twierdzenie Staudta-Darboux o przekształceniach afinicznych, płaszczyzna Möbiusa i pokrewieństwo kołowe, twierdzenie Cevy i Menelaosa oraz kilka innych drobniejszych); skreślenia te są również uzasadnione, ponieważ np. ze współrzędnych kowariantnych korzystało się tylko w jednym miejscu, a ustęp o płaszczyźnie Möbiusa właściwe swe miejsce znajdzie w wykładzie funkcji analitycznych. Dokonano również pewnego korzystnego przegrupowania materiału: iloczyn wektorowy z przypisu II przeszedł na właściwe miejsce w rozdziale II, traktującym o wektorach, dzięki czemu można go było zastosować do wyprowadzenia wzorów na pole trójkąta i objętość sześcianu, zamiast używać w tym celu współrzędnych kowariantnych. Materiał zawarty w rozdz. III pierwszego wydania (przykłady tworów geometrycznych) został rozmieszczony w kilku dalszych rozdziałach, co również wydaje mi się słuszne, ponieważ takie rzeczy jak np. równanie lemniskaty, linii śrubowej lub cykloidy umieszczone na początku wykładu są dla studiującego materiałem martwym. Zachowano natomiast przypis I (wyznaczniki, równania liniowe, formy kwadratowe); dla studentów matematyki dodatek ten jest zbyteczny, ponieważ obejmuje materiał będący przedmiotem wykładu algebry na pierwszym roku, jest on zresztą w tym samym zakresie umieszczony w równocześnie wydanym podręczniku: A. Mostowski i M. Stark, *Elementy algebry wyższej*. Przypuszczam, że autor umieścił go w swej książce ze względu na studentów uczelni technicznych; obawiam się jednak, że studenci politechnik. nie będą korzystali z tego podręcznika, z powodu bardzo małej obecnie liczby godzin wykładów matematyki na tych uczelniach i dlatego zachowanie przypisu wydaje mi się zbyteczne. Byłoby zdaje się pożyteczniej, gdyby autor uwzględnił raczej mój dezyderat i zamiast przypisu dodał na 2-3 stronach krótki zarys rozwoju geometrii analitycznej i rozwoju pojęć geometrii rzutowej. Byłoby to tym bardziej wskazane, że studenci mało na ogół otrzymują wiadomości z historii matematyki.

Nadmienić jeszcze należy, że podręcznik składa się w istocie z dwóch części: pierwsza (geometria afiniczna i metryczna) obejmuje materiał wykładany na pierwszym roku, część druga poświęcona geometrii rzutowej zawiera przedmiot wykładany w następnych latach.

Kończąc powtórzę swój sąd z poprzedniej recenzji, iż piękna książka M. Starka będzie cenną pomocą dla studentów matematyki i to w stopniu jeszcze większym, niż jej pierwsze wydanie.

W. Ślebodziński

Andrzej Mostowski i Marceli Stark, *Elementy algebry wyższej*, Biblioteka Matematyczna t. 16, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1958, str. 367.

Nareszcie polski student matematyki dostał do ręki polski podręcznik algebry, którym może się posługiwać na pierwszym roku studiów, bez uzupełniania materiału lub też opuszczania licznych zbyt trudnych rozdziałów. *Elementy algebry wyższej* Mostowskiego i Starka czynią w zasadzie zadość zarówno wymaganiom właściwego wyboru treści dla początkującego studenta, jak i postulatowi celowego ułożenia i jasnego przedstawienia tej treści, a przy tym widać w nich przebłyski nowoczesnego podejścia do klasycznych teorii. Oto spis rozdziałów: I Wstęp (Funkcje, zasada indukcji, sumy i iloczyny o dowolnej liczbie członów), II Zagadnienia

kombinatoryczne, III Liczby zespolone, IV Wyznaczniki, V Przestrzenie wektorowe i równania liniowe, VI Wielomiany jednej zmiennej, VII Pierścienie $Z[x]$ i $R[x]$ (tj. pierścienie wielomianów o współczynnikach zespolonych i rzeczywistych), VIII Równania kwadratowe, sześcienne i stopnia czwartego, IX Pierścień $W[x]$ (tj. wielomianów o współczynnikach wymiernych) oraz liczby algebraiczne i przestępne, X Wielomiany wielu zmiennych i funkcje symetryczne, XI Teoria eliminacji, XII Formy kwadratowe, Dodatek: Specjalne własności macierzy i wyznaczników. Rozdziały dzielą się na paragrafy. Po każdym paragrafie, a nieraz i w środku, po kilka dobrze dobranych zadań ćwiczebnych.

Autorzy potrafili przystępnie wyłożyć elementy algebry liniowej, nie wprowadzając ogólnego pojęcia przestrzeni liniowej, które jest dla początkujących za trudne. Poprzestali na przestrzeni „wektorowej", której elementami są „wektory", rozumiane jako układy n liczb. Wykład algebry liniowej jest podzielony między dwa rozdziały: 5-y i ostatni (12-y). W pierwszym z nich czytelnik znajduje pojęcie wymiaru i bazy przestrzeni wektorowej oraz teorię układów równań liniowych, a w drugim elementy właściwej algebry liniowej: przekształcenia liniowe i formy kwadratowe. Umieszczenie tego rozdziału na końcu wydaje się trafne, gdyż jego treść jest dla studentów trudna, a zrozumienie jest wtedy łatwiejsze, gdy znana jest z geometrii dyskusja równania drugiego stopnia, podczas gdy teoria wyznaczników i równań liniowych nie przysparza większych trudności i musi być podana wcześniej na użytek geometrii analitycznej. Rozdział o formach kwadratowych jest uproszczony i skrócony w porównaniu z odpowiednim rozdziałem I tomu trzytomowego dzieła *Algebra wyższa* tych samych autorów. Mimo to znalazło się w nim miejsce na sprowadzanie formy kwadratowej (rzeczywistej) do postaci kanonicznej przez przekształcenie ortogonalne. Jest to bardzo celowe ze względu na zastosowania geometryczne. Z tego samego względu recenzent żałuje, że nie wyprowadzono wzoru na transformację macierzy przekształcenia liniowego przy zmianie układu współrzędnych, że nie wprowadzono pojęcia iloczynu skalarnego i ortogonalności wektorów oraz pojęcia dopełnienia ortogonalnego, które jest proste i intuicyjne; że nie powiedziano, co to jest wektor własny i że w konsekwencji ukryto geometryczną treść twierdzenia o ortogonalnym transformowaniu macierzy symetrycznych (tj. macierzy form kwadratowych) do postaci kanonicznej, która to treść tkwi w niezmienniczości dopełnienia ortogonalnego podprzestrzeni niezmienniczej. Poprzestanie na definicji przekształcenia ortogonalnego jako zachowującego długość i na definicji wartości własnych jako pierwiastków równania charakterystycznego, nie daje czytelnikowi właściwego poglądu. Oczywiście przez te uzupełnienia rozdział by się powiększył, ale chyba nie stałby się trudniejszy, a zawarłby w sobie zasadnicze pojęcia i twierdzenia euklidesowej algebry liniowej, której studenci z żadnego innego obowiązkowego wykładu nie poznają. W dodatku autorzy podali inne wiadomości z teorii macierzy (np. twierdzenie Cayleya-Hamiltona).

Z pojęć algebry abstrakcyjnej autorzy wprowadzili właściwie tylko pojęcie ciała. Algebrze abstrakcyjnej, wraz z elementami teorii grup i teorią Galois, oraz trudniejszym działom algebry liniowej poświęcony był 3-i tom wspomnianej *Algebry wyższej*, z którego w *Elementach* celowo nie pozostawiono prawie nic. Definicja ciała w ogóle poprzedzona jest definicją ciała liczbowego. Byłoby może lepiej nie rezygnować z ogólnego pojęcia pierścienia i nie poprzestawać na definicji pierścienia wielomianów (nad ciałem liczbowym). Sposobności do wyjaśnienia na przykładach, czym jest pierścień, w książce nie brak. W szczególności, w paragrafie poświęconym arytmetyce liczb całkowitych, umieszczonym bardzo słusznie i zawierającym zasadnicze twierdzenie arytmetyki oraz rozkład na czynniki pierwsze, można by dać przy-

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

kład pierścienia skończonego, mianowicie pierścienia reszt według danego modułu, i wykazać, że ten pierścień jest ciałem, gdy moduł jest liczbą pierwszą. Dałoby się to uczynić od razu, gdyż równanie diofantyczne $ax + by = 1$ zostało przedyskutowane w związku z algorytmem Euklidesa i dowodem zasadniczego twierdzenia arytmetyki. Autorzy trafnie umieścili paragraf o arytmetyce liczb całkowitych w rozdziale o wielomianach jednej zmiennej. Dzięki temu oba algorytmy Euklidesa: dla liczb i dla wielomianów, oraz wnioski z nich płynące znalazły się obok siebie.

Zbyt mało może wykorzystano podstawowe twierdzenie o funkcjach symetrycznych. Na przykład, wyróżnik zdefiniowany jest tylko jako rugownik wielomianu i jego pochodnej z właściwym znakiem, a rugownik — przez odpowiedni wyznacznik utworzony ze współczynników dwóch równań. Tymczasem definicja wyróżnika jako kwadratu wyznacznika Vandermonde'a, utworzonego z pierwiastków równania, pozwala od razu poznać jego rolę, a dzięki twierdzeniu o wielomianach symetrycznych udowodnić jego wymierność, co jest ładne i pouczające. Podobnie można udowodnić wymierność rugownika określonego jako iloczyn różnic $a_i - b_j$ pierwiastków a_i jednego i b_j drugiego równania (definicja przez wyznacznik jest nieco ogólniejsza).

Autorzy zachowują na ogół czystość metody algebraicznej. Odstępstwo uczyniono np. przy wielomianach, które określono jako funkcje. Zresztą jeśli sięgnąć głębiej, nie wykracza to oczywiście poza pojęcia algebry, a ogranicza tylko ogólność pojęcia wielomianu na rzecz jego przystępności. Inne odstępstwo nie daje się, zdaniem recenzenta, tak łatwo usprawiedliwić: to konstrukcja liczb zespolonych jako punktów płaszczyzny, a więc na podstawie obcych pojęć geometrii syntetycznej. Dlaczego nie uczynić tego bardziej algebraicznie, przez pary uporządkowane, dając przez to próbkę ogólnej metody, a obrazowi geometrycznemu nie zostawić roli ilustracji?

Skądinąd sama definicja ciała liczb zespolonych jest aksjomatyczna: jest to najmniejsze ciało zawierające liczby rzeczywiste i pierwiastek kwadratowy z -1. W innych miejscach autorzy również sięgali do definicji aksjomatycznych; zdefiniowano na przykład w ten sposób wyznacznik, już po wykładzie teorii wyznaczników, opartym na zwykłej definicji konstrukcyjnej.

Książka jest zaopatrzona w skorowidz terminów. Dobra szata graficzna i wystawienie nawet krótkich i nienumerowanych wzorów na środek linii zwiększają łatwość czytania, a przez to podnoszą jeszcze bardziej wartość książki jako podręcznika.

S. Hartman

Marek Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, wydanie drugie, Biblioteka Matematyczna t. 18, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1958, str. 540.

Mamy oto drugie wydanie książki, która ukazała się po raz pierwszy w roku 1954 i była omawiana na łamach Wiadomości Matematycznych(1).

Nowe wydanie różni się od starego bardzo znacznie. Już sama zmiana objętości o tym mówi: 540 stron zamiast dawniejszych 374. Inna rzucająca się w oczy zmiana to znaczne rozszerzenie informacji bibliograficznych: w starym wydaniu spis prac

(1) S. Zubrzycki, „*M. Fisz, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1954, str. 374", Wiadomości Matematyczne 1 (1956), str. 277-280.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego