kład pierścienia skończonego, mianowicie pierścienia reszt według danego modułu, i wykazać, że ten pierścień jest ciałem, gdy moduł jest liczbą pierwszą. Dałoby się to uczynić od razu, gdyż równanie diofantyczne $ax + by = 1$ zostało przedyskutowane w związku z algorytmem Euklidesa i dowodem zasadniczego twierdzenia arytmetyki. Autorzy trafnie umieścili paragraf o arytmetyce liczb całkowitych w rozdziale o wielomianach jednej zmiennej. Dzięki temu oba algorytmy Euklidesa: dla liczb i dla wielomianów, oraz wnioski z nich płynące znalazły się obok siebie.

Zbyt mało może wykorzystano podstawowe twierdzenie o funkcjach symetrycznych. Na przykład, wyróżnik zdefiniowany jest tylko jako rugownik wielomianu i jego pochodnej z właściwym znakiem, a rugownik — przez odpowiedni wyznacznik utworzony ze współczynników dwóch równań. Tymczasem definicja wyróżnika jako kwadratu wyznacznika Vandermonde'a, utworzonego z pierwiastków równania, pozwala od razu poznać jego rolę, a dzięki twierdzeniu o wielomianach symetrycznych udowodnić jego wymierność, co jest ładne i pouczające. Podobnie można udowodnić wymierność rugownika określonego jako iloczyn różnic $a_i - b_j$ pierwiastków a_i jednego i b_j drugiego równania (definicja przez wyznacznik jest nieco ogólniejsza).

Autorzy zachowują na ogół czystość metody algebraicznej. Odstępstwo uczyniono np. przy wielomianach, które określono jako funkcje. Zresztą jeśli sięgnąć głębiej, nie wykracza to oczywiście poza pojęcia algebry, a ogranicza tylko ogólność pojęcia wielomianu na rzecz jego przystępności. Inne odstępstwo nie daje się, zdaniem recenzenta, tak łatwo usprawiedliwić: to konstrukcja liczb zespolonych jako punktów płaszczyzny, a więc na podstawie obcych pojęć geometrii syntetycznej. Dlaczego nie uczynić tego bardziej algebraicznie, przez pary uporządkowane, dając przez to próbkę ogólnej metody, a obrazowi geometrycznemu nie zostawić roli ilustracji?

Skądinąd sama definicja ciała liczb zespolonych jest aksjomatyczna: jest to najmniejsze ciało zawierające liczby rzeczywiste i pierwiastek kwadratowy z -1. W innych miejscach autorzy również sięgali do definicji aksjomatycznych; zdefiniowano na przykład w ten sposób wyznacznik, już po wykładzie teorii wyznaczników, opartym na zwykłej definicji konstrukcyjnej.

Książka jest zaopatrzona w skorowidz terminów. Dobra szata graficzna i wystawienie nawet krótkich i nienumerowanych wzorów na środek linii zwiększają łatwość czytania, a przez to podnoszą jeszcze bardziej wartość książki jako podręcznika.

S. Hartman

Marek Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, wydanie drugie, Biblioteka Matematyczna t. 18, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1958, str. 540.

Mamy oto drugie wydanie książki, która ukazała się po raz pierwszy w roku 1954 i była omawiana na łamach Wiadomości Matematycznych(1).

Nowe wydanie różni się od starego bardzo znacznie. Już sama zmiana objętości o tym mówi: 540 stron zamiast dawniejszych 374. Inna rzucająca się w oczy zmiana to znaczne rozszerzenie informacji bibliograficznych: w starym wydaniu spis prac

(1) S. Zubrzycki, „*M. Fisz, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1954, str. 374", Wiadomości Matematyczne 1 (1956), str. 277-280.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

liczył 67 pozycji, w nowym — 202. Jest to wynikiem nie tylko znacznych zmian i uzupełnień starego tekstu, ale także skutkiem dołączenia nowych rozdziałów i paragrafów.

Zmiany zaczynają się już na samym początku książki. Przeredagowano wiele fragmentów rozdziału 1, poświęconego omówieniu zdarzeń losowych i matematycznego pojęcia prawdopodobieństwa, i rozdziału 2 o zmiennych losowych. Między innymi zmieniono treść i kolejność definicji odnoszących się do klasyfikacji zmiennych losowych na ciągłe i dyskretne (u autora — skokowe), zyskując na precyzyjności i jasności wykładu. W rozdziale 3, traktującym o liczbowych charakterystykach rozkładów zmiennych losowych, poza zmianami redakcyjnymi dodano nowe paragrafy o charakterystykach rozkładów zmiennych losowych wielowymiarowych. W rozdziale 4 o funkcjach charakterystycznych dodano paragraf o funkcjach tworzących, które w zakresie zmiennych losowych przyjmujących wartości naturalne oddają te same usługi, co funkcje charakterystyczne, a ich teoria jest prostsza. Pewnym zmianom uległ rozdział 5, w którym opisuje się ważniejsze rozkłady prawdopodobieństwa. Między innymi dodano tu nowe paragrafy o wielowymiarowych rozkładach normalnych, o rozkładzie wielomianowym i o tak zwanych rozkładach złożonych. Uzupełniono wieloma informacjami o nowszych wynikach w zakresie twierdzeń o rozkładach granicznych sum niezależnych zmiennych losowych oraz wskazówkami bibliograficznymi rozdział 6 o twierdzeniach granicznych. Dodano tu paragraf o rozkładach granicznych sum niezależnych wektorów losowych. Wreszcie dodano do pierwszej części książki, zatytułowanej ogólnie *rachunek prawdopodobieństwa*, dwa nowe rozdziały. Rozdział 7 poświęcono łańcuchom Markowa, stanowiącym ważne uogólnienie prób niezależnych. Chodzi tu o zastąpienie niezależności zdarzeń wymaganiem, aby warunkowy rozkład prawdopodobieństwa wyników następnej próby zależał tylko od wyniku próby poprzedniej. Omówiono tu w terminach prawdopodobieństw przejścia analogony znanych z poprzedniego rozdziału twierdzeń o rozkładach granicznych i praw wielkich liczb, którymi są twierdzenia o granicach prawdopodobieństw przejścia i o zbieżności średnich. Sformułowano prostsze wyniki i podano niektóre dowody. Rozdział 8 podaje dalsze uogólnienie problematyki probabilistycznej na procesy stochastyczne z czasem ciągłym. Podano pojęcia procesu Markowa, procesu o przyrostach niezależnych, procesu stacjonarnego w węższym i szerszym sensie. Omówiono szczegółowiej niektóre ważne procesy stochastyczne z przeliczalną ilością stanów, w tym proces Poissona, procesy urodzin i śmierci, a wśród procesów o nieprzeliczalnej ilości stanów — proces ruchów brownowskich. Wykorzystano okazję do wskazania wyników polskich z tego zakresu. Oba te rozdziały zapoznając czytelnika z podstawowymi pojęciami, ukazując problematykę i ilustrując ją na przykładach, a wreszcie podając obfite informacje bibliograficzne — dobrze spełniają rolę wstępu do tej ogromnej dziedziny teorii i zastosowań rachunku prawdopodobieństwa, jaką są procesy stochastyczne.

Liczne są także zmiany i uzupełnienia w drugiej, statystycznej części książki. Sporo paragrafów istotnie przeredagowano, dodano wiele uzupełnień. Jedno z nich — to dodanie w rozdziale 9, omawiającym rozkłady prawdopodobieństwa momentów próbkowych i ich funkcji, nowych paragrafów omawiających zagadnienia związane z wyznaczaniem parametrów wielowymiarowych rozkładów normalnych. Przeszło półtorakrotnie wzrósł rozdział 10 o rozkładach statystyk pozycyjnych, mimo iż część materiału, jaki zawierał on w pierwszym wydaniu, przeniesiono do rozdziału 9. Uzupełnienia polegały tu między innymi na podaniu dowodów niektórych twierdzeń. Dotyczy to np. twierdzenia Gliwienki o jednostajnej zbieżności dystrybuant empirycznych i twierdzenia Smirnowa o rozkładzie granicznym dla maksimum różnicy mię-

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

dzy dystrybuantami empirycznymi. W tym ostatnim przypadku podano zaczerpnięty z literatury elementarny dowód tego twierdzenia w szczególnym przypadku równości obu próbek. Zreferowano tu również pokrewne twierdzenie graniczne, udowodnione przez Rényi'ego, o rozkładzie granicznym maksimum ilorazu różnicy między dystrybuantą empiryczną i dystrybuantą populacji przez dystrybuantę populacji. Idąc za panującą obecnie tendencją do konstruowania testów statystycznych, przy stosowaniu których praca rachunkowa byłaby ograniczona do minimum, dodał autor rozdział 11 o teorii seryj oraz — w rozdziale 12 o testach istotności — opis testów opartych na tej teorii. Uzupełniono nowym, ciekawym paragrafem nadal krótki rozdział 15 o analizie wariancji. W pozostałych rozdziałach — o teorii estymacji, o metodach i schematach losowania, o ogólnej teorii testów i o elementach analizy sekwencyjnej — zmiany nie są wielkie. Na końcu książki podano króciutkie informacje o pochodzącym od Walda ogólnym ujęciu zagadnień statystycznych — tak zwanej teorii statystycznych funkcji decyzyjnych.

Z uznaniem przyjąć należy dodanie do książki rozdziału o teorii seryj. Sądzę, że z punktu widzenia zastosowań cieszyć by się należało, gdyby ten rozdział o rachunkowo łatwych testach został rozszerzony przez zreferowanie i innych tego rodzaju metod w rodzaju statystyk porządkowych (test Wilcoxona, korelacja kolejności (rank correlation), itp.). Szkoda też, że we wstępie do tego rozdziału nie uwypuklił autor tej przeszkody w praktycznym korzystaniu z metod statystycznych, jaką stanowią żmudne nieraz rachunki. Dla pełniejszego objęcia wykładem aktualnego pola zastosowań statystyki życzyć by sobie również można rozszerzenia rozdziału o analizie wariancji i zreferowania ogólniejszej metody testowania hipotez liniowych. Jeśli zaś chodzi o teoretyczne naświetlenie problematyki statystycznej, pożądanym byłoby szczegółowsze zreferowanie wspomnianego wyżej ujęcia zwanego teorią statystycznych funkcji decyzyjnych.

Omawialiśmy dotychczas rzeczową zawartość książki. Jeśli chodzi o jasność i formalną poprawność wykładu, stwierdzić wypada, że w drugim wydaniu książka pod tym względem wiele zyskała. Nie znaczy to jednak, że nie ma miejsc wymagających ulepszenia. Np. na str. 282 podana jest definicja próby losowej, która jest niezrozumiała — nie wyjaśniono bowiem, co należy rozumieć przez warunkową dystrybuantę $F_k(x|x_1, \ldots, x_{k-1})$ zmiennej losowej X pod warunkiem, że pierwsze $k-1$ wyborów dało wyniki $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$. Czy nie można prościej opisać losowania bez zwracania i losowania ze zwracaniem, o jakie tam przecież chodzi? Inny przykład: na str. 286 defininiuje autor rozkład χ^2 z n stopniami swobody jako rozkład sumy kwadratów n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, wartości oczekiwanej zero i dyspersji $\sigma \neq 0$. Można i tak, ale na całym świecie przyjęte jest[2]) uważać za rozkład χ^2 z n stopniami swobody taki rozkład, jak opisano wyżej, z tym jednak, że $\sigma = 1$. Nie widać powodów, dla jakich potrzebne byłoby takie odstąpienie od tradycji, według której jeden parametr — liczba stopni swobody — określa rozkład χ^2. Sprzeczałbym się również z autorem o niektóre terminy. Dlaczego funkcję P^*, która zbiorom borelowskim S na prostej przypisuje prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową X wartości z tego zbioru, nazywa autor *funkcją prawdopodobieństwa* (zobacz str. 34, określenie 2.1.3), a nie *rozkładem prawdopodobieństwa* zmiennej losowej X? Dlaczego pochodną dystrybuanty nazywa autor *funkcją gęstości* (gęstość argumentem funkcji?), a nie po prostu *gęstością*?

([2]) Porównaj H. Cramér, *Mathematical methods of statistics*, Princeton 1946, § 18. 1; tłumaczenie polskie *Metody matematyczne w statystyce*, PWN, Warszawa 1958.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Książka Fisza jest pierwszym w Polsce poważnym i obszernym wykładem rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Jest to książka matematyczna o zacięciu teoretycznym, w której chodzi przede wszystkim o przedstawienie pojęć matematycznych, twierdzeń, dowodów. Spełnia też rolę przewodnika po literaturze omawianych w niej zagadnień. Mniejszy nacisk położono na motywację wprowadzanych pojęć i twierdzeń. Przykłady są raczej ilustracją teorii, a niezbyt starano się uwypuklić ich rolę jako argumentu wskazującego na potrzebę zbudowania samej teorii. Jako kodyfikacja obszernego materiału książka Fisza jest dziełem cennym, zajmującym godne miejsce wśród czołowych publikacji tego rodzaju na świecie.

S. Zubrzycki

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Kazimierz Bartel, *Perspektywa malarska*, część II, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1958, str. 589.

Perspektywa malarska, cz. II, jest wydana po upływie 17 lat od tragicznej śmierci autora Kazimierza Bartla, dzięki staraniom i pod troskliwą redakcją byłego współpracownika autora, Franciszka Otto, któremu udało się uratować maszynopis i ilustracje tego dzieła.

Część drugą *Perspektywy malarskiej*, tak jak i powojenne wydanie części pierwszej, wydało Państwowe Wydawnictwo Naukowe w roku 1958 w 10000 egzemplarzy na papierze ilustracyjnym. Wywody części drugiej zawarte są w tomie obejmującym 589 stronic druku (łącznie z tytułowymi) wraz z 472 rysunkami i ilustracjami oraz ze spisem bibliograficznym obejmującym 117 pozycji, skorowidzem rzeczowym, skorowidzem nazwisk, spisem ilustracji i spisem rzeczy. 5 rysunków wykonano metodą anaglifów, dla odczytywania których dołączone są dwukolorowe okulary. Całość w twardej płóciennej oprawie chronionej spokojną obwolutą, którą projektował Henryk Białoskórski.

W dziele swym autor podbudowywuje przedstawioną w części I metodę rzutu środkowego przez omówienie szeregu zjawisk fizjologicznych, występujących w procesie widzenia. Podaje także wnikliwą analizę niektórych zjawisk natury subiektywnej, z natury rzeczy nieco różnie indywidualnie interpretowanych wrażeń, wywołanych w umyśle pod działaniem obserwacji obrazu perspektywicznego. Wyraźnie rozgranicza „perspektywę subiektywną" i „perspektywę obiektywną", a szukając dla nich „wspólnego mianownika", podejmuje próbę analizy skomplikowanych zagadnień, które nie mogą być rozwiązane jedynie na drodze logicznej spekulacji myślowej, lecz oprócz doświadczeń konstrukcyjnych, technicznych, oprócz własnych spostrzeżeń z natury rzeczy subiektywnych, muszą posługiwać się także subiektywnymi spostrzeżeniami wielu innych ludzi.

Całość II części *Perspektywy malarskiej* jest podzielona na XI rozdziałów, przy czym zarysowywuje się dość wyraźnie podział na część teoretyczno-ogólną (rozdziały I-VI) i część analityczno-historyczną (rozdziały VII-XI), zakończoną pod koniec rozdziału XI wnikliwą próbą syntezy.

Opierając się na szerokiej literaturze, zapoznaje autor czytelnika kolejno z prawami spostrzegania przedmiotów i to zarówno geometrycznymi, jak i potrzebnymi do dalszych dociekań fizjologicznymi właściwościami zmysłu przestrzennego oka. Przy sposobności wprowadza systematycznie pojęcia i terminy, które są niezbędne dla naukowej analizy tych zjawisk. Zajmuje się nie tylko prawami rządzącymi powstawaniem obrazu perspektywicznego jako przekroju płaszczyzną cen-