wmptm 1897

wrażenia przestrzennego, zdobytych na drodze eksperymentu, i wniosków z doświadczeń praktycznych ujętych statystycznie, będą na pewno drogowskazem jak postępować należy, by nie zagubić żadnego z tych jednakowo ważnych nurtów.

Z. Palasiński

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Witold Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania*, t. II, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1958, str. 192.

Literatura podręcznikowa z teorii równań całkowych jest olbrzymia, ale — z nielicznymi wyjątkami — książki te są bliźniaczo podobne — stereotypowe: teoria równania Fredholma II rodzaju, teoria Hilberta-Schmidta równania z jądrem symetrycznym, twierdzenie Mercera, ewentualnie kilka zastosowań. Trzeba niestety powiedzieć, że prace te w obliczu monumentalnych klasycznych *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen* Hilberta (1904-12 r.) wyglądają ubogo i płytko.

O ile pierwszy tom monografii Pogorzelskiego jest klasycznym wykładem, to w drugim tomie, poświęconym zastosowaniom, autor idzie własnymi drogami i można się cieszyć, że właśnie w Polsce napisano tę monografię.

Pierwsze rozdziały (VIII-XI, numeracja rozdziałów jest bieżąca przez oba tomy) wykładają kanoniczne od czasów Hilberta i Fredholma zastosowania, przy czym już rozdział X wprowadza twierdzenie o punkcie niezmienniczym Schaudera i podaje pierwsze jego zastosowania do układów równań postaci

$$\varphi_i(x) = \lambda \int_{\Omega_N} \frac{F_i(x, y, \varphi_1(y), \ldots, \varphi_p(y))}{|x-y|^{a_i}}\, dy \qquad (a_i < N,\ i = 1, \ldots, p),$$

gdzie funkcje F_i są ciągłe.

Przychodzą teraz największe i najcenniejsze rozdziały monografii (str. 40-160): Zastosowania równań całkowych do teorii potencjału i równań różniczkowych typu eliptycznego (rozdział XII) oraz typu parabolicznego (rozdział XIII). W rozdziałach tych referuje autor w sposób bardzo jasny i przystępny rezultaty swych badań ostatnich lat poświęconych zastosowaniom zasady Schaudera. Schemat tych rozdziałów (ilustrowany na przykładzie równania eliptycznego) przedstawia się następująco:

Niech

$$Au \overset{\text{df}}{=} \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

będzie operatorem typu eliptycznego (np. $A = \Delta$ — operator Laplace'a). Bada się istnienie rozwiązania zagadnienia brzegowego

$$\text{(I)} \qquad Au(x) = F(x, u, \operatorname{grad} u) \quad \text{wewnątrz obszaru } \Omega_N,$$

$$\text{(II)} \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + gu\right)\Big|_{\partial\Omega_N} = \Phi(x, u)|_{x \in \partial\Omega_N},$$

gdzie $\partial\Omega_N$ oznacza brzeg obszaru Ω_N, $\partial/\partial n$ — pochodną transwersalną (normalną w przypadku $A = \Delta$).

Po skonstruowaniu quasi-rozwiązania podstawowego $\Gamma(x, y)$ operatora A ($\Gamma(x, y) = |x-y|^{2-N}$ w przypadku $A = \Delta$) bada się najpierw tzw. potencjały uogólnione, tzn. całki postaci

$$w(x) = \int_{\Omega_N} \varrho(y)\Gamma(y, x)\,dy, \qquad v(x) = \int_{\partial\Omega_N} \mu(y)\Gamma(y, x)\,dy.$$

Na przykład okazuje się, że funkcja w spełnia równanie Poissona

$$Aw(x) = -\omega_N(x)\varrho(x), \qquad x \in \Omega_N$$

($\omega_N(x)$ jest powierzchnią sfery jednostkowej w N-wymiarowej przestrzeni, w przypadku gdy $A = \Delta$).

Podobnie uogólniony potencjał powierzchniowy v spełnia analogiczne relacje przy przejściu przez brzeg $\partial\Omega_N$ obszaru Ω_N, jak zwykły potencjał powierzchniowy w przypadku operatora Laplace'a.

Poszukuje się teraz rozwiązania problemu (I), (II) w postaci funkcji spełniającej następujące równanie różniczkowo-całkowe

$$\text{(III)} \qquad u(x) = -\int_{\Omega_N} \Gamma(x, y)\omega_N^{-1}(y)F(y, u(y), \operatorname{grad} u(y))\,dy + \int_{\partial\Omega_N} \Gamma(x, y)\varphi(y)\,dy$$

(gdzie φ jest nieznane). Żądając, by funkcja (III) spełniała warunek brzegowy (II) i wykorzystując własności pochodnej transwersalnej potencjału powierzchniowego, otrzymujemy drugie równanie różniczkowo-całkowe (IV), którego tu nie przytaczamy.

Wprowadzając za $\partial u/\partial y_i$ nowe zmienne u_i możemy zapisać układ (III), (IV) w postaci

$$\text{(V)} \qquad \vec{u} = K\vec{u}, \qquad \text{gdzie} \qquad \vec{u} = (u, u_1, \ldots, u_N, \varphi).$$

Dobierając odpowiednio przestrzeń X układów $N+2$ funkcji i w niej podzbiór wypukły W wykazuje się, że operacja K jest ciągła, a zbiór $K(W) = \{\vec{u} \in X: \vec{u} \in W\}$ jest zwarty i zawiera się w zbiorze W, więc na zasadzie Schaudera w ujęciu Mazura istnieje punkt stały $\vec{u_0}$: $\vec{u_0} = K\vec{u_0}$. Ponieważ rozwiązanie równania (V) jest jednocześnie rozwiązaniem problemu brzegowego (I), (II), problem ten posiada rozwiązanie.

Ostatni, XIV rozdział obok klasycznych zastosowań równań całkowych do teorii równań hiperbolicznych (zagadnienia Darboux, Cauchy'ego, Picarda) podaje jasny i zwięzły referat metody Wekuy: otrzymywanie rozwiązań równań eliptycznych z dwiema zmiennymi niezależnymi o współczynnikach analitycznych.

Książkę zamyka „Dodatek" napisany przez R. Sikorskiego, podający dowód twierdzenia Schaudera o punkcie stałym.

Monografia W. Pogorzelskiego — choć traktuje w swej głównej partii problemy trudne — napisana jest zupełnie przystępnie. Może ją czytać student matematyki ostatnich lat. Stanowi ona jednocześnie bardzo dobre wprowadzenie do „metody potencjałów w teorii równań cząstkowych".

Wydaje się, że referowany tu II tom winien ukazać się w jednym z międzynarodowych języków naukowych.

K. Maurin

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego