ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE III (1959)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

J. LERAY (Paryż)

O twórczości Juliusza Pawła Schaudera

Twórczość Juliusza Pawła Schaudera jest pozornie różnorodna. Prowadził on badania, uzyskując niejednokrotnie wyniki wielkiej wagi, w czterech dziedzinach matematyki studiowanych zazwyczaj niezależnie. W istocie twórczość ta wykazuje wielką ciągłość: Schauder nie ograniczał się do jednej dziedziny, starał się zawsze dotrzeć do źródła problemów, orientował się, że wymagają one niejednokrotnie stosowania metod różnych od powszechnie przyjętych. Myśl jego rozwijała się nie zważając na klasyfikujące wiedzę przegrody, które umysły naprawdę oryginalne zawsze obalają.

Jego niezwykłe zdolności szły w parze z pięknymi cechami charakteru: był bardzo pracowity i dokładny. Nie narzucał sobie zagadnień — badał te, które narzucają się same. Twórczość jego nie była olśniewającą grą, ale ciężką pracą uwieńczoną stworzeniem metody, której doskonałość wskazuje drogi dalszemu rozwojowi nauki.

Teoria całki była przedmiotem jego pierwszych prac. W tezie swej [1] zajmuje się miarami powierzchniowymi w przestrzeni euklidesowej, zdefiniowanymi przez Jansena i Grossa; w szczególności rozszerza zakres stosowalności wzoru Stokesa wyrażającego całkę powierzchniową przez objętościową. W [8] dowodzi półciągłości obu tych miar powierzchniowych. W [7] rozważa inny wzór Stokesa — wyrażający na płaszczyźnie całkę pojedynczą przez podwójną. Daje temu wzorowi ogólność, której można by oczekiwać dopiero od znacznie późniejszych teorii — funkcji uogólnionych Sobolewa, dystrybucji Schwartza lub potoków de Rahma; stosuje go do rachunku wariacyjnego. W [6] przeprowadza wnikliwą analizę przekształceń płaszczyzny w siebie, wyznaczników funkcyjnych tych przekształceń, przekształceń odwrotnych, zamiany zmiennych w całkach podwójnych — korzysta tu z pojęcia indeksu topologicznego. W tym czasie jego pierwsze prace z topologii algebraicznej są już oddane do druku.

Topologia algebraiczna przestrzeni Banacha powinna dawać w szczególnym przypadku klasyczne własności przestrzeni euklidesowych odkryte przez L. E. J. Brouwera i J. W. Alexandera. Nie wierzono

wówczas w możliwość takiego uogólnienia, jednak Schauderowi udało się je osiągnąć.

Niech X będzie przestrzenią Banacha, x punktem przestrzeni X; przekształcenie ciągłe przestrzeni X w siebie nazywa się *pełnociągłe*, jeśli przeprowadza podzbiory ograniczone X w podzbiory zwarte; dalej $F(x)$ oznaczać będzie przekształcenie pełnociągłe.

Schauder dowodzi twierdzenia o punkcie stałym: jeśli $F(x)$ przekształca w siebie podzbiór ograniczony i wypukły X, wówczas zawiera on punkt stały, tj. taki, że $F(x) = x$.

Dowodzi twierdzenia o niezmienniczości obszaru: każde przekształcenie wzajemnie jednoznaczne postaci $x - F(x)$ jest homeomorfizmem i przekształca obszar na obszar.

Definiuje rząd topologiczny w punkcie y przekształcenia $\Phi(x) = x - F(x)$, określonego na obszarze D i jego ograniczeniu D': rząd jest funkcją całkowitoliczbową, addytywną względem D; określony jest, gdy $y \notin \Phi(D')$ — jeśli ten warunek pozostaje spełniony, rząd nie ulega zmianie przy ciągłej zmianie danych. Jest równy 0, gdy $y \notin \Phi(D)$, i ± 1, gdy Φ jest wzajemnie jednoznaczne i $y \in \Phi(D)$. Rząd przekształcenia $x - F(x)$, określonego na D w punkcie $y = 0$, nazywa się *indeksem zupełnym* punktów stałych przekształcenia F zawartych w D. W ten sposób określony jest indeks dla dowolnego ograniczonego, izolowanego zbioru punktów stałych F. Jest to funkcja addytywna zbioru o wartościach całkowitoliczbowych. Ciągła zmiana danych nie zmienia jej wartości, jeśli tylko pozostaje określona. Np. indeks punktu zerowego funkcji analitycznej $\Phi(x)$ zmiennej zespolonej x jest krotnością zera w tym punkcie — jest to liczba dodatnia. Te własności indeksu punktów stałych pozwoliły ustalić istnienie rozwiązania, a niejednokrotnie i jednoznaczności dla wielu ważnych problemów analizy.

Wiadomo na jakiej drodze F. Riesz osiągnął dowód alternatywy Fredholma dla równości liniowych postaci

$$x - F(x) = y \qquad (y \text{ dane}).$$

Uogólnienie to jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia o niezmienniczości obszaru. Zanotujmy jeszcze, że uogólnienia innych twierdzeń I. Fredholma otrzymał Schauder w [12]: bada tam w przestrzeni dualnej przekształcenia sprzężone. Schauder dowodzi swego twierdzenia o punkcie stałym w [10]. W [3], [4] i [10] podaje jego warianty stosowalne tylko do pewnych przestrzeni Banacha. Przypomnijmy, że G. D. Birkhoff i O. D. Kellog dowiedli tego twierdzenia dla pewnych przestrzeni funkcyjnych. Twierdzenia o niezmienniczości obszaru dowodzi w [9] i [17]; ogranicza się do pewnych przestrzeni Banacha, ale badanie

rzędu topologicznego przekształcenia superponowanego da ogólny i prosty dowód tego twierdzenia. Rząd topologiczny przekształcenia i indeks punktów stałych Schauder określa i bada w [19], [18] stanowi streszczenie wyników; w [33] podana jest dyskusja tych zagadnień. Twierdzenie o punkcie stałym było następnie udowodnione przez A. Tichonowa dla przestrzeni lokalnie wypukłych. Schauder przewidział możliwość, zrealizowaną obecnie, udowodnienia dla tych przestrzeni wszystkich twierdzeń poprzednich, twierdzeń J. W. Alexandera o izomorfizmie grup Bettiego uzupełnień zbiorów domkniętych homeomorficznych i wzoru Lefschetza dla punktów stałych. Ale już inne zagadnienia przykuły jego uwagę: teoria równań różniczkowych cząstkowych.

Do odkryć, które omówiliśmy, nie doprowadziły Schaudera rozważania abstrakcyjne. Na temat wyjaśniony przez jego odkrycia teoretycy przestrzeni abstrakcyjnej nie umieli powiedzieć nic ponad to, że fakt, iż przestrzeń Hilberta jest homeomorficzna ze swymi podrozmaitościami liniowymi wymiaru nieskończonego, dowodzi niestosowalności twierdzenia o niezmienniczości obszaru i topologii algebraicznej w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych. Szukając teorii równań nieliniowych, stosowalnej do problemu nieliniowego Dirichleta, Schauder odkrył jednak możliwość takiego zastosowania. Podobnie I. Fredholm stworzył teorię równań funkcyjnych liniowych, szukając funkcji harmonicznych spełniających warunki brzegowe.

Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu typu eliptycznego były niejednokrotnie przedmiotem badań Schaudera. Jego prace zawierające cytowane przed chwilą twierdzenia topologiczne zawierają również zastosowania tych twierdzeń do równań całkowych, zagadnienia Cauchy'ego, najczęściej do nieliniowego zagadnienia Dirichleta. Oswobadza tam twierdzenia egzystencjalne od założeń gwarantujących jednoznaczność. Jednym z najbardziej godnych uwagi jest wynik zawarty w [19], otrzymany za pomocą metod sygnalizowanych w [15] i rozwiniętych w [21]. Zagadnienie Dirichleta jest, jak wiadomo, rozwiązalne w obszarze wypukłym dla równania quasiliniowego typu eliptycznego postaci

$$a\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \\ + c\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad (ac > b^2).$$

Twierdzenie to było udowodnione przez S. Bernsteina przy założeniu, że a, b i c nie zależą od z. Rozwiązanie jest wówczas jednoznaczne. Metoda

podana przez Schaudera unika użycia ciężkiego aparatu szeregów normalnych Bernsteina, wymagającego zresztą analityczności zadanych funkcji. Stosuje on natomiast najbardziej precyzyjne twierdzenia z teorii liniowego zagadnienia Dirichleta. Nota [24] zawiera interesujące zastosowanie tej metody, pozwalające zrewidować oraz uzupełnić piękne badania nieliniowego zagadnienia Dirichleta drugiego rzędu dla dwu zmiennych niezależnych przeprowadzone przez Bernsteina. Schauder zadowolił się tylko zapoczątkowaniem takiej rewizji.

Uwaga jego skupiła się na liniowym zagadnieniu Dirichleta. Dla konstrukcji regularnych rozwiązań tego problemu konstruowano podstawowe rozwiązanie osobliwe, a za jego pomocą potencjały, których gęstości wyznaczało pewne równanie Fredholma. Postępowanie to stosowane do równania Laplace'a jest proste, daje explicite rozwiązanie i pozwala wygodnie badać jego własności. Sytuacja jest jednak zupełnie inna, gdy stosuje się je do równania liniowego o zmiennych współczynnikach. Nie daje ono wtedy rozwiązania, staje się natomiast żmudnym dowodem twierdzenia o istnieniu. Schauder podaje bezpośredni dowód tego twierdzenia. Wykazuje on, że zagadnienie Dirichleta jest rozwiązalne, gdy norma tego rozwiązania, założywszy jego istnienie, może być zmajoryzowana przez pewne funkcje danych; wykonuje explicite tę „majoryzację a priori" wykorzystując w zręczny sposób własności równania Laplace'a.

Postępowanie to naszkicowane jest w [16] i rozwinięte w [20]. Rozwiązanie jego rozpoczyna Schauder od sprecyzowania właściwości potencjałów newtonowskich warstwy pojedynczej i podwójnej. Ponieważ jednak O. D. Kellog wyprzedził go w tych badaniach ukazała się tylko pierwsza część pracy: [13] i [14]. Wtedy Schauder publikuje w [22] pierwszą wersję swej metody, po roku daje w [26] drugą — niezwykle elegancką i krótką. Dziewięć stronic [26] i sześć stanowiących IV rozdział [22] stanowią pełną teorię liniowego zagadnienia Dirichleta. Nota [23] podaje jej ważny wariant. Teoria ta odznacza się godną podziwu prostotą i wnikliwością.

W wykładzie [32] przedstawia Schauder z wielką jasnością istotę tej metody i proponuje stosowanie jej do równań eliptycznych dowolnego rzędu. Rzeczywiście, piętnaście lat później zagadnienie Dirichleta zostało zręcznie rozwiązane za pomocą szacowania a priori normy jego rozwiązania, przez M. I. Wiszika (1951), L. Gårdinga (1951) i F. E. Browdera (1952-1956).

Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu typu hiperbolicznego były dopiero co przedmiotem słynnej rozprawy Hadamarda „Zagadnienie Cauchy'ego i równania różniczkowe cząstkowe liniowe

typu hiperbolicznego" (1932). Hadamardowi udało się rozwiązać to zagadnienie dla dowolnej liczby zmiennych. Rozwiązanie jego było analogiczne do klasycznego rozwiązania zagadnienia Dirichleta: konstrukcja rozwiązania podstawowego i za jego pośrednictwem potencjałów, lecz definicja tych ostatnich była bardzo subtelna — trzeba było brać części skończone całek. Postępowanie to było względnie proste w przypadku równań liniowych ze stałymi współczynnikami, komplikowało się jednak w przypadku zmiennych współczynników. Dawało wprawdzie pewne wyrażenie rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego, ale nie dawało możliwości badania własności tego rozwiązania, rozwiązania nieliniowego zagadnienia Cauchy'ego ani zagadnienia typu Cauchy-Dirichleta (zagadnienia mieszanego).

Schauder używa dla zagadnienia Cauchy'ego i zagadnienia mieszanego (liniowego lub nie) innej metody, analogicznej do użytej dla problemu Dirichleta: opiera się na majoryzacji a priori rozwiązania i na możliwości rozwiązania zagadnienia w przypadku szczególnym. Za pomocą nierówności Sobolewa otrzymuje on majoryzację a priori z prawa zachowania energii, ściślej z uogólnienia tego prawa użytego przez K. Friedrichsa i H. Lewy'ego, przy rozwiązaniu zagadnienia Cauchy'ego za pomocą równań różnicowych. Rozpatrywanym przypadkiem szczególnym nie jest już, jak przy zagadnieniu Dirichleta, równanie o współczynnikach stałych, lecz zagadnienie z danymi analitycznymi. Schauder korzysta tu z twierdzenia Cauchy-Kowalewskiej. Mówiąc ściślej, uzupełnia to twierdzenie jak następuje: zagadnienie liniowe ma rozwiązanie holomorficzne w obszarze zależącym tylko od obszaru holomorficzności zadanych funkcji i współczynników równania. To uzupełnienie pozwoli później na badanie osobliwości rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych liniowych analitycznych.

Tą metodą rozwiązuje Schauder zagadnienie Cauchy'ego w [25] i [28], później, wspólnie z M. Krzyżańskim, zagadnienie mieszane w [27] i [28]. W [33] podaje jej piękny wariant, wymagający minimalnych założeń, stosujący się do równania rzędu pierwszego i do układu równań rzędu pierwszego dwu zmiennych niezależnych. Idzie ciągle o równania hiperboliczne liniowe lub nieliniowe. W [29] streszcza wyniki tych czterech prac.

I. Pietrowski jest wówczas w trakcie uogólniania jego metody na równania dowolnego rzędu (Mat. Sbornik 1937). Schauder czyni dalsze odkrycia; być może te, które anonsuje [31] i ostatnie wiersze [28].

Wojna przynosi śmierć jemu i jego żonie.

* *
*

Zapoczątkować topologię algebraiczną przestrzeni Banacha, sprowadzić klasyczne zagadnienia teorii równań różniczkowych do dowodu skończoności normy pewnych przekształceń liniowych przestrzeni funkcyjnych, to znaczy być uczniem Stefana Banacha i jednocześnie wielkim prekursorem.

Schauder był również współpracownikiem Banacha; dowiódł w [11] twierdzenia, w którego prawdziwość Banach wierzył, udowodniwszy jego najważniejszy wniosek. Twierdzenie to jest dziś znane pod nazwą twierdzenia Banacha. Nazwa ta spotkałaby się na pewno z aprobatą Schaudera, bo wielka była jego wdzięczność i podziw dla Banacha.

Schauder pozostawał również pod innymi wpływami. Właśnie dlatego, że badania Bernsteina i Hadamarda pasjonowały go, stworzył metody lepsze od używanych przez nich. Trzeba zacytować tu jeszcze nazwiska L. E. J. Brouwera, G. D. Birkhoffa i O. D. Kelloga, był również uczniem H. Poincarégo, który w nocie o swych pracach powiedział: „Co do mnie, wszystkie drogi, na które wstępowałem kolejno, prowadziły mnie do topologii". Schaudera zaprowadziła tam droga zupełnie inna.

Spis prac Juliusza Schaudera

[1] J. Schauder, *The theory of surface measure*, Fund. Math. 8 (1926), str. 1-48.

[2] — *Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems*, Math. Zeit. 28 (1927), str. 317-320.

[3] — *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Zeit. 26 (1927), str. 47-65.

[4] — *Bemerkungen zu meiner Arbeit „Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen"*, Math. Zeit. 26 (1927), str. 417-431.

[5] — *Przyczynki do teorii ciągłych odwzorowań w przestrzeniach funkcyjnych*, nakładem autora, Lwów (1927), str. 1-13.

[6] — *Über die stegige Abbildungen*, Fund. Math. 12 (1928), str. 46-74.

[7] — *Über die Umkehrung eines Satzes aus der Variationsrechnung*, Acta Litter. ac Scient. Szeged 4 (1928), str. 38-50.

[8] — *Über die Halbstetigkeit des Flächenmasses*, Fund. Math. 13 (1929), str. 269-276.

[9] — *Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen*, Stud. Math. 1 (1929), str. 123-139.

[10] — *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Stud. Math. 2 (1930), str. 171-180.

[11] — *Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen*, Stud. Math. 2 (1930), str. 1-8.

[12] — *Über lineare vollstetige Funktionaloperationen*, Stud. Math. 2 (1930), str. 185-196.

[13] — *Potentialtheoretische Untersuchungen*, Math. Zeit. 33 (1931), str. 602-640.

[14] — *Bemerkung zu meiner Arbeit „Potentialtheoretische Untersuchungen" I (Anhang)*, Math. Zeit. 35 (1932), str. 536-538.

[15] — *Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Math. Ann. 106 (1932), str. 661-721.

[16] — *Sur le problème de Dirichlet généralisé pour les équations non linéaires du type elliptique*, C. R. Ac. Sc. Paris, 195 (1932), str. 201-203.

[17] — *Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique*, C. R. Ac. Sc. Paris 195 (1932), str. 1365-1367.

[18] — *Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique*, C. R. Ac. Sc. Paris 196 (1933), str. 89-90.

[19] — *Über das Dirichletsche Problem im Grossen für nicht-lineare elliptische Differentialgleichungen*, Math. Zeit. 37 (1933), str. 623-634.

[20] J. Schauder et J. Leray, *Topologie et équations fonctionnelles*, C. R. Ac. Sc. Paris 197 (1933), str. 115-117.

[21] — *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. de l'Ec. Norm. Sup., S III, 51 (1934), str. 45-78.

[22] J. Schauder, *Sur les équations linéaires du type elliptique á coefficients continus*, C. R. Ac. Sc. Paris 199 (1934), str. 1366-1368.

[23] — *Sur les équations quasilinéaires du type elliptique á coefficients continus*, C. R. Ac. Sc. Paris 199 (1934), str. 1566-1568.

[24] — *Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen*, Fund. Math. 24 (1934), str. 213-246.

[25] — *Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Zeit. 38 (1934), str. 257-282.

[26] — *Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen*, Stud. Math. 5 (1935), str. 34-42.

[27] J. Schauder und M. Krzyżański, *Quasilineare Differentialgleichungen. Gemischte Randwertaufgabe*, Stud. Math. 6 (1936), str. 162-189.

[28] J. Schauder, *Gemischte Randwertaufgabe bei partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus*, Stud. Math. 6 (1936), str. 190-198.

[29] — *Nicht-lineare partielle Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus*, Congrès Int. des Math. Oslo 1 (1936), str. 60-61.

[30] J. Schauder et S. Mazur, *Über ein Prinzip in der Variationsrechnung*, Congrès Int. des Mat. Oslo 1 (1936),

[31] J. Schauder, *Équations du type elliptique. Problémes linéaires*. Conférences internationales sur les équations aux dérivées partielles, Genéve, juin 1935, Ens. Math. 35 (1936), str. 126-139.

[32] — *Einige Anwendungen der Topologie der Funktionalräume*, Rec. Math. Moscou N. S. 1 (1936), str. 747-753.

[33] — *Cauchysches Problem für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, Comm. Math. Helv. 9 (1937), str. 263-287.