ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE III (1959)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

O pewnym wniosku z hipotezy Goldbacha

Celem niniejszego artykułu jest podanie elementarnego dowodu (nie odwołującego się do twierdzenia Lejeune-Dirichleta o postępie arytmetycznym), że ze znanej hipotezy Goldbacha (iż każda liczba parzysta >2 jest sumą dwóch liczb pierwszych) wynika następujące

TWIERDZENIE T. *Dla każdej liczby naturalnej parzystej $2k$ i każdego modułu naturalnego m istnieją dowolnie wielkie liczby pierwsze p i q, takie że*

$$2k \equiv p+q \pmod{m}.$$

Dowód wynikania. Niech k i m będą danymi liczbami naturalnymi. Ponieważ przy naturalnym n liczba $2k+2mn$ jest liczbą parzystą >2, więc z hipotezy Goldbacha wynika, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją liczby pierwsze p_n i $q_n \leqslant p_n$ takie, iż

$$2k+2mn = p_n+q_n. \tag{1}$$

Wobec (1) oraz $p_n \geqslant q_n$ znajdujemy natychmiast, że $p_n > mn$, skąd $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$.

Niech a oznacza daną liczbę naturalną i przypuśćmy, że dla $n>a$ mamy stale $q_n \leqslant a$. Z (1) wynika, że

$$p_{n+1}-p_n = 2m+q_n-q_{n+1}. \tag{2}$$

Gdyby było $q_n \leqslant a$ dla $n>a$, wówczas, wobec (2), mielibyśmy

$$|p_{n+1}-p_n| < 2m+a \quad \text{dla} \quad n>a. \tag{3}$$

Niech n oznacza największą liczbę naturalną $>a$, taką że

$$p_n \leqslant (2m+a)!\,p_{a+1}+1; \tag{4}$$

wobec tego, że $p_{a+1} < (2m+a)!p_{a+1}+1$ oraz $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$ taka liczba n istnieje. Będzie więc

$$p_{n+1} \geqslant (2m+a)!p_{a+1}+2 \tag{5}$$

oraz, wobec (3) i (4),

$$p_{n+1} \leqslant (2m+a)!p_{a+1}+2m+a. \tag{6}$$

Z (5) i (6) znajdujemy

$$p_{n+1} = (2m+a)!p_{a+1}+l, \tag{7}$$

gdzie $2 \leqslant l \leqslant 2m+a < p_{n+1}$, skąd wynika, że liczba p_{n+1} jest podzielna przez liczbę l; to zaś jest niemożliwe, gdyż p_{n+1} jest liczbą pierwszą.

Istnieje więc liczba naturalna $n > a$ taka, że $q_n > a$. Lecz dla $n > a$ mamy też $p_n > mn > a$. Liczby pierwsze p_n i q_n są obie $> a$. Wobec dowolności liczby naturalnej a, liczby p_n i q_n mogą być (przy odpowiednim n) dowolnie wielkie, a ponieważ wzór (1) daje natychmiast

$$2k \equiv p_n+q_n \pmod m,$$

wiec dowiedliśmy, że z hipotezy Goldbacha wynika twierdzenie T.

Zauważmy tu, że opierając się na twierdzeniu Lejeune-Dirichleta, lecz nie odwołując się do hipotezy Goldbacha, A. Schinzel w swej pracy *Démonstration d'une conséquence de l'hypothèse de Goldbach*, Compositio Mathematica (w druku) udowodnił twierdzenie T.