ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE III (1959)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Z. Opial (Kraków)

Elementarny dowód pierwszej reguły Guldina

W wykładzie rachunku różniczkowego i całkowego tak zwane reguły Guldina uzyskuje się najczęściej jako proste wnioski z wyprowadzonych uprzednio wzorów na objętość i pole powierzchni bryły obrotowej z jednej strony i wzorów na współrzędne środka ciężkości obszaru płaskiego i krzywej płaskiej — z drugiej strony. Jakkolwiek więc treść geometryczna obu reguł Guldina nie nastręcza żadnych trudności, to przecież sam związek pomiędzy objętością bryły obrotowej czy polem jej powierzchni a położeniem środków ciężkości generującego ją obszaru czy jego brzegu — związek otrzymany z formalnego zestawienia dwóch wzorów — pozostaje nadal niejasny. Związek ten mogłaby oczywiście wyjaśnić bliższa analiza sposobu otrzymywania wzorów całkowych, z których w konsekwencji wynikają reguły Guldina, zastąpienie wzorów całkowych wzorami przybliżonymi, w których zamiast całek występowałyby odpowiednie sumy aproksymacyjne, lub inne tego rodzaju ujęcie, ale wydaje się, że nie udałoby nam się w ten sposób usunąć wszystkich trudności czy wątpliwości i sprowadzić interpretację geometryczną związków określonych regułami Guldina do jednej jakiejś lub kilku prostych zasad geometrycznych.

Obserwujemy przy tym rzecz niezwykle ciekawą. Obie reguły Guldina znane były na kilkadziesiąt lat przed odkryciem rachunku różniczkowego i całkowego i z tego też powodu wydawać by się mogło, że matematycy XVII wieku znali wyrażone tymi regułami związki pomiędzy objętościami i powierzchniami brył obrotowych a środkami ciężkości obszarów i linii płaskich nie ze strony raczej formalnej — jak we współczesnej matematyce — ale właśnie od strony ich geometrycznej treści. Otóż bynajmniej tak nie było! Guldin, z nazwiskiem którego łączy się dziś te reguły, w ogóle ich uzasadnić nie umiał! Formułuje je w swoim dziele o środkach ciężkości [1] tylko i wyłącznie na podstawie indukcji niezupełnej, wysnuwając ogólne wnioski (tym razem prawdziwe, co mu się zresztą nie zawsze udawało) z prawdziwości tych reguł w szeregu przypadków specjalnych. Ogólne dowody tych reguł potrafili podać dopiero matematycy szkoły włoskiej — Bonawentura Cavalieri i Ewangelista

Torricelli. Jeżeli chodzi o pierwszą regułę, wyrażającą związek odległości od osi obrotu środka ciężkości obszaru płaskiego z objętością powstałej zeń bryły obrotowej, to według świadectwa B. Cavalieriego[1] ogólną zasadę jej dowodu podał pierwszy Antonio Rocca, chociaż wyprowadził tę regułę tylko w szczególnym przypadku — mianowicie dla paraboli. Dowód Antonia Rocci podaje E. Torricelli[2] w swoim dziele *De dimensione parabolae.*

Ale dowody te — pomijając oczywiste różnice w stopniu ścisłości, terminologii itd. — pokrywają się w zupełności z dowodami znanymi nam z rachunku różniczkowego i całkowego. Podstawowe idee i zasady, mającego powstać dopiero za kilkadziesiąt lat, rachunku różniczkowego i całkowego były po prostu tak dobrze znane czołowym matematykom XVII wieku, że zastosowanie ich w tak prostym przypadku, jak reguły Guldina, nie nastręczało im specjalnych trudności. Tym bardziej, że idee te i zasady, stosowane dotychczas tylko w sporadycznych przypadkach, zaczęły się stawać w tych właśnie czasach — szczególnie w pracach matematyków włoskich — zalążkiem nowej niezwykle płodnej i uniwersalnej metody.

Tak więc, pomimo przeszło trzechsetletniej już historii reguł Guldina, daje się w dalszym ciągu odczuć brak jakiejś prostej geometrycznej ich interpretacji. Niniejszy artykuł stanowi właśnie próbę nadania treści geometrycznej wyrażonej pierwszą regułą Guldina prostej — jak mi się wydaje — interpretacji, a zarazem próbę sprowadzenia dowodu tej reguły do kilku elementarnych zasad, takich jak zasada Cavalieriego, proste twierdzenia o środkach ciężkości itp. Pozwoli to na zupełne wyeliminowanie z dowodu pierwszej reguły Guldina elementów rachunku

---

(1) „E perchè anco al Signore Rocca sovvenne due anni sono una simil cosa, poiche dimostrò, che il momento della parabola librata intorno la base con un parallelogrammo applicato all'istessa base al momento del parallelogrammo è, come il solido descritto dalla parabola, cioè il fuso parabolico al cilindro fatto dal parallelogrammo,... e la dimostrazione de Signor Rocca fatta per gl'indivisibili si adatta ad ogni altra figura piana, perciò è manifesto, che il Signor Rocca viene virtualmente ad aver dimostrato, che questi corpi rotondi hanno la proporzione composta della proporzione delle figure genitrici, e delle circonferenze descritte da' Centri, d'onde finalmente si prova, facilmente, che la soliditá di un qualunque corpo rotondo è il prodotto della circonferenza fatta dal Centro molteplicata nella figura genitrice" — czytamy w liście B. Cavalieriego do E. Torricellego z dnia 13 stycznia 1643 roku. Patrz E. Torricelli, *Opere*, t. III, str. 94, Faenza 1919.

(2) E. Torricelli, *De dimensione parabolae*, 1644, lemma XXXI (Authore Io Antonio Rocca):

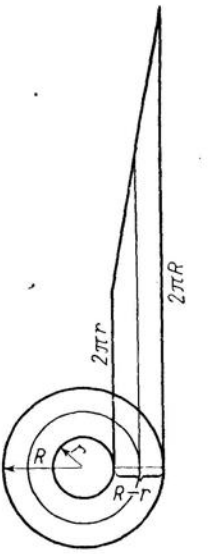
„Si figura plana super aliqua sui recta linea figuram ipsam secante libretur, erunt momenta segmentorum figurae, ut sunt solida rotunda ab ipsis segmentis circa secantem lineam revolutionis, descripta".

różniczkowego i całkowego, i co za tym idzie na nadanie temu dowodowi bardziej elementarnej formy.

Chodzić mi będzie w zasadzie tylko o podanie idei takiego dowodu, dlatego też ograniczę się do najprostszego przypadku, tj. do przypadku, gdy rozważany obszar płaski jest ograniczony krzywą wypukłą. Nie będzie to ograniczenie istotne, analogiczny dowód można przeprowadzić dla obszarów znacznie ogólniejszych.

1. Zacznę od następującego oczywistego lematu:

Pole pierścienia kołowego, którego brzeg zewnętrzny jest okręgiem o promieniu R, a wewnętrzny okręgiem o promieniu r, jest równe polu trapezu o podstawie $R-r$ i bokach równoległych równych odpowiednio $2\pi R$ i $2\pi r$ (rys. 1).



Rys. 1

Treść tego lematu łatwo zinterpretować geometrycznie. Można sobie mianowicie wyobrazić, że rozważany trapez powstaje przez wyprostowanie wszystkich okręgów o promieniach pośrednich między r i R, składających się razem na powierzchnię rozważanego pierścienia kołowego. Zauważmy, że czwarty bok trapezu tworzy z jego podstawą kąt $\operatorname{arctg} 2\pi$.

Ze sformułowanego wyżej lematu wynika natychmiast następujące

TWIERDZENIE I. *Objętość bryły obrotowej, powstałej przez obrót wokół osi l obszaru płaskiego Ω, jest równa objętości walca prostego o podstawie Ω, ściętego płaszczyzną przechodzącą przez oś obrotu l i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem* $\operatorname{arctg} 2\pi$.

Dowód. Przekroje rozważanych brył płaszczyznami prostopadłymi do osi obrotu l będą odpowiednio — pierścieniami kołowymi (w szczególnym przypadku kołami) i trapezami (trójkątami), takimi jak okręgi i trapezy porównywane w lemacie poprzednim. Z lematu tego wynika zatem, że pola przekrojów obu brył płaszczyznami prostopadłymi do l będą równe. A stąd, na podstawie zasady Cavalieriego, wynika od razu, że objętości samych brył też będą równe, c.b.d.o.

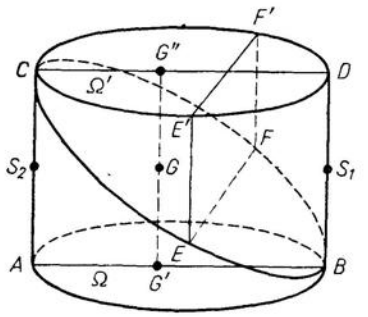
2. Twierdzenie I poprzedniego paragrafu sprowadza obliczanie objętości brył obrotowych do problemu obliczania objętości walców prostych o dowolnych podstawach, ściętych dowolnymi płaszczyznami. Dla tego rodzaju brył udowodnię następujące

TWIERDZENIE II. *Objętość walca prostego, ściętego dowolną płaszczyzną, równa się iloczynowi pola podstawy walca przez długość odcinka pro-*

stej prostopadłej do podstawy i przechodzącej przez środek ciężkości podstawy, zawartego między podstawą a płaszczyzną ścinającą.

Inaczej twierdzenie to można by wypowiedzieć tak: objętość walca ściętego płaszczyzną równa jest iloczynowi pola podstawy przez średnią jego wysokość, przy czym przez średnią wysokość należałoby rozumieć wysokość walca mierzoną od środka ciężkości jego podstawy. Odpowiadałoby to następującemu twierdzeniu z rachunku różniczkowego i całkowego: średnia całkowa funkcji liniowej w dowolnym obszarze płaskim równa jest wartości tej funkcji w środku ciężkości rozważanego obszaru.

Dostatecznie elementarnego dowodu tego twierdzenia samemu mi się nie udało znaleźć. Dowód taki znalazłem natomiast w dziełach zebranych E. Torricellego [2]. Wprawdzie oryginalne rozumowanie Torricellego odnosi się do pewnego bardzo szczególnego przypadku (walec paraboliczny), ale sama zasada dowodu daje się z łatwością przenieść na przypadek ogólny.



Rys. 2

Dowód twierdzenia II. Załóżmy za Torricellim, że rozważany walec (wypukły) posiada płaszczyznę symetrii prostopadłą do płaszczyzny podstawy i płaszczyzny górnej ściany. Możemy się przy tym ograniczyć do przypadku, gdy płaszczyzna ścinająca przechodzi przez jeden punkt brzegu podstawy (rys. 2).

Uzupełnijmy wpierw rozważaną bryłę do normalnego walca i poprowadźmy płaszczyznę symetrii $ABCD$. Oznaczmy przez G' i G'' środki ciężkości obszarów Ω i Ω'. Oczywiście środek ciężkości G pełnego walca będzie leżał w środku odcinka $G'G''$. Oznaczmy przez P i Q odpowiednio środki ciężkości walców ściętych $ABECF$ i $CDBEF$, a przez V_1 i V_2 ich objętości. Punkty P, Q i G leżą na jednej prostej, a ponadto

$$PG \cdot V_1 = QG \cdot V_2,$$

czyli

$$PG/QG = V_2/V_1. \tag{1}$$

Punkty P i Q, podobnie jak i punkt G, leżą w płaszczyźnie symetrii $ABCD$ (rys. 3). Połączmy punkt C ze środkiem S_1 odcinka BD. Twierdzę, że punkt Q leży na odcinku CS_1. Rzeczywiście, przekrój (rys. 2) walca $CDBEF$ dowolną płaszczyzną $EFE'F'$ prostopadłą do AB jest

prostokątem, którego środek leży na odcinku CS_1. A zatem środek ciężkości całej bryły $CDBEF$ też będzie położony na tym odcinku. Podobnie można by wykazać, że punkt P leży na odcinku BS_2, gdzie S_2 oznacza środek odcinka AC.

Nie znamy wprawdzie w zupełności położenia punktów P i Q, niemniej jednak wiadomość, że punkty te leżą na odcinkach BS_2 i CS_1 pozwoli nam na wyliczenie stosunku PG/QG. Istotnie,

$$PG/QG = h_1/h_2.$$

A zatem, z wzoru (1) otrzymujemy

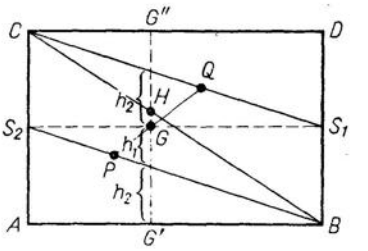
$$V_1 = V_2 \frac{h_2}{h_1}. \tag{2}$$

Z drugiej strony jednak, suma objętości V_1 i V_2 daje nam objętość całego walca. Mamy zatem

$$V_1 + V_2 = P(\Omega)AC, \tag{3}$$

gdzie $P(\Omega)$ oznacza pole obszaru Ω. Z wzorów (2) i (3) można z łatwością wyliczyć V_1; mamy mianowicie

$$V_1 = \frac{AC}{h_1 + h_2} h_2 P(\Omega). \tag{4}$$



Rys. 3

Łatwo jednak zauważyć, że $h_1 + h_2$ równe jest połowie odcinka AC, a $2h_2 = G'H$. Mamy więc ostatecznie

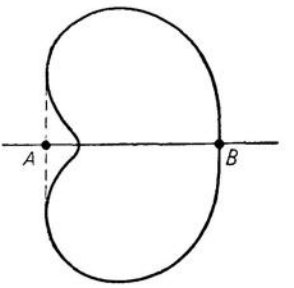
$$V_1 = P(\Omega) \cdot G'H. \tag{5}$$

Twierdzenie II zostało więc (dla walców wypukłych o odpowiedniej płaszczyźnie symetrii) w zupełności udowodnione. Z bliższej analizy przeprowadzonego powyżej dowodu wynika natychmiast, że całe to rozumowanie i wszystkie rachunki można by przeprowadzić także i w przypadku, gdy obszar Ω nie jest obszarem wypukłym, a nawet w przypadku, gdy jest to obszar niespójny. Wprawdzie wówczas przekroje rozpatrywanych walców płaszczyznami takimi jak $EFE'F'$ nie byłyby już prostokątami, ale i tak środki ciężkości tych przekrojów leżałyby na odcinku CS_1 itd., z tą tylko różnicą, że na ogół punkty A, B, C, D płaszczyzny symetrii nie leżałyby na brzegu obszaru Ω, ale poza nim (rys. 4).

Tak więc jedynie założenie o płaszczyźnie symetrii rozpatrywanego walca wydaje się w przedstawionym powyżej dowodzie twierdzenia II

istotne. Jednak i ogólny przypadek, gdy takiej płaszczyzny nie ma, daje się z łatwością sprowadzić do przypadku już rozważanego. Mając mianowicie dowolny obszar Ω można skonstruować obszar Ω' symetryczny do Ω względem jakiejś prostej prostopadłej do krawędzi przecięcia się płaszczyzny, na której leży Ω, z płaszczyzną ścinającą walca. Można przy tym oś symetrii dobrać tak, aby obszary Ω i Ω' nie miały punktów wspólnych. Wtedy walec ścięty zbudowany na $\Omega+\Omega'$ będzie oczywiście posiadał płaszczyznę symetrii — stosować się będzie zatem doń wzór (5). Wzór ten będzie więc — jak łatwo widzieć — prawdziwy także dla walca pierwotnego zbudowanego na Ω, zarówno bowiem jego objętość, jak i pole podstawy będą równe dokładnie połowom objętości i pola podstawy walca zbudowanego na $\Omega+\Omega'$, a wysokości tych walców „mierzone" w środkach ciężkości ich podstaw będą jednakowe.

3. Z twierdzeń I i II, udowodnionych w poprzednich paragrafach, otrzymujemy jako prosty wniosek



Rys. 4

TWIERDZENIE III (Pierwsza reguła Guldina). *Objętość bryły obrotowej, powstałej przez obrót obszaru Ω wokół osi l, równa jest iloczynowi pola tego obszaru przez drogę, jaką przy tym obrocie zakreśla środek ciężkości obszaru Ω.*

Dowód. W myśl twierdzenia I, objętość rozważanej bryły obrotowej jest równa objętości walca prostego zbudowanego na obszarze Ω i ściętego od góry płaszczyzną przechodzącą przez oś obrotu, nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\operatorname{arctg} 2\pi$. Z twierdzenia II wynika z kolei, że objętość tego walca równa jest iloczynowi pola podstawy przez wysokość mierzoną w środku ciężkości podstawy. Otóż wysokość ta — jak łatwo widzieć — jest równa właśnie drodze, jaką zakreśla środek ciężkości obszaru Ω przy obrocie wokół osi l.

Prace cytowane

[1] *P. Guldini, De Centro Gravitatis*, t. I, 1635; t. II, 1640; t. III i IV, 1641.
[2] E. Torricelli, *Opere*, t. III, Faenza 1919.