ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE III (1959)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

P. Lisowski (Warszawa)

O wielokątnych pokrywach zbiorów płaskich

W przestrzeni n-wymiarowej zbiór punktów D nazywamy *pokrywą zbiorów* ε pewnej rodziny $\{\varepsilon\}$, jeżeli każdy zbiór ε tej rodziny jest zawarty w jakimś zbiorze przystającym do zbioru D. W dalszym ciągu rozważać będziemy zbiory punktów na płaszczyźnie, przy czym $\{\varepsilon\}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów domkniętych o średnicy 1.

Wiadomo, że najmniejszym kołem będącym pokrywą zbiorów ε jest koło o promieniu $1/\sqrt{3}$ (H. W. E. Jung [1]), najmniejszą zaś pokrywą kształtu sześciokąta foremnego jest dla tychże zbiorów ε sześciokąt o boku $1/\sqrt{3}$ (J. Pál [2]). Tematem niniejszej pracy jest pewna własność ekstremalna tej ostatniej pokrywy.

Twierdzenie 1. *Spośród wszystkich wielokątów foremnych będących pokrywami zbiorów ε najmniejsze pole (i najmniejszy obwód) ma sześciokąt foremny S o boku $1/\sqrt{3}$.*

Dowód. Przypuśćmy, że wielokąt foremny P_n o n bokach nieprzystający do sześciokąta S jest pokrywą zbiorów ε. Jeśli ϱ_n oznacza promień koła wpisanego w P_n, a r_n — promień koła opisanego na P_n, to

$$\varrho_n \geqslant \frac{1}{2}, \qquad r_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pierwsza z tych nierówności wynika stąd, że P_n zawiera koło o średnicy 1, należące do zbiorów ε. Druga zaś nierówność zachodzi dlatego, że gdyby wielokąt P_n zawierał się w kole o promieniu r_n mniejszym od $1/\sqrt{3}$, to każdy zbiór ε zawierałby się również w kole o promieniu r_n, wbrew twierdzeniu Junga.

Możliwe są 3 następujące przypadki:

a) $n = 6$; wówczas $\varrho_n \neq \frac{1}{2}$, gdyż P_n nie przystaje do S, zatem $\varrho_n > \frac{1}{2}$, wobec czego pole $P_n >$ pola S.

b) $n > 6$; niech P_n' będzie takim wielokątem podobnym do P_n, dla którego promień koła opisanego jest równy $1/\sqrt{3}$, wówczas pole

$P_n \geqslant$ pola P'_n. Wielokąty foremne P'_n i S mają równe koła opisane, a P'_n ma więcej boków niż S, więc pole $P'_n >$ pola S. Z obu przesłanek wynika, że pole $P_n >$ pola S.

c) $n < 6$; niech P''_n będzie takim wielokątem podobnym do P_n, dla którego promień koła wpisanego jest równy $\frac{1}{2}$, wówczas pole $P_n \geqslant$ $\geqslant$ pola P''_n. Wielokąty foremne P''_n i S mają równe koła wpisane, a P''_n ma mniej boków niż S, zatem pole $P_n >$ pola S. Ostatecznie pole $P_n >$ $>$ pola S, c. b. d. o.

W taki sam sposób dowodzimy, że obwód $P_n >$ obwodu S.

TWIERDZENIE 2. *Sześciokąt foremny S o boku $1/\sqrt{3}$ ma mniejsze pole (a także mniejszy obwód) niż każdy wielokąt P_n o liczbie boków $n \leqslant 6$, będący pokrywą zbiorów ε, nieprzystający do S.*

Dowód. Udowodnimy najpierw następujący

LEMAT. *Jeżeli wielokąt P_n o n bokach zawiera koło K, to istnieje wielokąt wypukły Q_m o $m \leqslant n$ bokach zawarty w P_n i zawierający K.*

Dla dowodu zastosujemy indukcję zupełną.

Gdy $n = 3$, lemat jest prawdziwy, gdyż P_3 jest wielokątem wypukłym i można przyjąć $Q_m = P_3$.

Przypuśćmy, że $n > 3$ i że lemat jest prawdziwy dla wielokątów o liczbie boków mniejszej niż n, i niech P_n będzie wielokątem o n bokach zawierającym koło K. Jeżeli wielokąt P_n jest wypukły, to można przyjąć $Q_m = P_n$. Jeżeli wielokąt P_n nie jest wypukły, to ma on co najmniej jeden kąt $> \pi$; niech takim kątem będzie $\sphericalangle A_1A_2A_3$, gdzie A_1, A_2, A_3 oznaczają trzy kolejne wierzchołki wielokąta P_n.

Możliwe są tu 2 przypadki:

1) Przynajmniej jedna z prostych A_1A_2, A_2A_3, na przykład A_1A_2, jest rozłączna z wnętrzem koła K. Koło K leży więc w jednym z wielokątów — nazwijmy go R — na jakie prosta A_1A_2 rozcina wielokąt P_n. Wielokąt R ma co najwyżej $n-1$ boków, istnieje zatem, według założenia, taki wielokąt wypukły Q_m o $m \leqslant n-1$ bokach, że $K \subset Q_m \subset R$; wtedy również $K \subset Q_m \subset P_n$.

2) Na każdej z prostych A_1A_2 i A_2A_3 znajdują się punkty wewnętrzne koła K. W tym przypadku styczna do koła K poprowadzona przez punkt A_2 leży w kącie wklęsłym $A_1A_2A_3$ i odcina od wielokąta P_n wielokąt R', który ma mniej boków niż P_n i zawiera K. Istnieje zatem, jak w przypadku 1), taki wielokąt wypukły Q_m o $m \leqslant n-1$ bokach, że $K \subset Q_m \subset P_n$.

Lemat został więc udowodniony; zauważmy, że wielokąt wypukły zawierający koło K zawiera również wielokąt o tej samej liczbie boków opisany na kole K.

Dowód twierdzenia 2 można obecnie ująć krótko. Wielokąt P_n o n bokach będący pokrywą zbiorów ε zawiera koło o średnicy 1, istnieje zatem wielokąt Q_m o liczbie boków $m \leqslant n$ opisany na kole K i zawarty w P_n. Niech R_m będzie wielokątem foremnym o m bokach opisanym na kole K. Jeżeli $m < 6$, to pole $S <$ pola R_m, gdyż pola wielokątów foremnych opisanych na tym samym kole maleją, gdy liczba boków wzrasta. Pole $R_m \leqslant$ pola Q_m, ponieważ ze wszystkich wielokątów o tej samej liczbie boków opisanych na tym samym kole najmniejsze pole ma wielokąt foremny. Wynika stąd, że pole $S <$ pola P_n. Jeżeli $m = 6$ a wielokąt Q_m nie jest foremny, to pole $S <$ pola Q_m, a zatem tym bardziej pole $S <$ pola P_n. Jeżeli wreszcie $m = 6$ i Q_m jest wielokątem foremnym, to pole $S =$ pole $Q_m <$ pola P_n, gdyż w tym przypadku $P_n \neq Q_m$, więc Q_m jest częścią właściwą P_n.

Dla obwodów dowód jest analogiczny.

Z udowodnionego lematu wynika, że pole $S <$ pola $\overline{P}_7$, gdzie $\overline{P}_7$ jest dowolnym siedmiokątem wklęsłym, będącym pokrywą zbiorów ε.

Zbierając otrzymane wyniki dochodzimy do następującego wniosku.

Wniosek. *Wśród tych pokryw wszystkich zbiorów o średnicy* 1, *które są bądź wielokątami foremnymi, bądź wielokątami o co najwyżej* 6 *bokach, bądź siedmiokątami wklęsłymi, istnieje pokrywa o najmniejszym polu i obwodzie. Pokrywą tą jest sześciokąt foremny o boku* $1/\sqrt{3}$.

Łatwo stwierdzić (patrz J. Pál [1]), że wśród wielokątów wypukłych mających więcej niż 6 boków istnieją pokrywy zbiorów ε o polu mniejszym od pola S. Obróćmy sześciokąt S dokoła środka o kąt α, przy czym $0 < \alpha < \frac{1}{3}\pi$, do położenia S'. Zbiór $S - S'$ składa się z sześciu trójkątów (bez podstaw) $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_6$ przy kolejnych wierzchołkach S. Ośmiokąt O utworzony z S przez odrzucenie trójkątów T_1 i T_3 jest pokrywą zbiorów o średnicy 1. Niech ε będzie zbiorem o średnicy 1, wówczas istnieje zbiór ε' przystający do ε i leżący w sześciokącie S. Zauważmy, że w każdej parze trójkątów T_i i T_{i+3} $(i = 1, 2, 3)$ przynajmniej jeden jest rozłączny z ε', każdy bowiem punkt zbioru T_i od każdego punktu zbioru T_{i+3} ma odległość > 1. Stąd wynika, że spośród trójkątów T_i co najmniej trzy są rozłączne z ε'. Wśród tych trzech trójkątów są dwa takie, które leżą przy końcach jednej z mniejszych przekątnych sześciokąta S, tzn. trójkąty T_i i T_{i+2}, gdzie i jest jedną z liczb 1, 2, 3, 4. Jeśli zbiór ε' obrócimy dokoła środka sześciokąta S o kąt $\frac{1}{3}(i-1)\pi$ w kierunku malejących wskaźników i, otrzymamy zbiór ε'' przystający do S i rozłączny z trójkątami T_1 i T_3, tzn. zawarty w ośmiokącie O. Zatem O jest pokrywą zbiorów o średnicy 1. Pole ośmiokąta O jest najmniejsze, gdy $\alpha = \frac{1}{6}\pi$.

Prace cytowane

[1] H. W. E. Jung, *Über den kleinsten Kreis, der eine ebene Figur einschliesst*, Journal für reine u. angew. Mathematik 137 (1910), str. 310-313.

[2] J. Pál, *Über ein elementares Variationsproblem*, Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. 3 (1920), Nr 2, str. 35.