ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE III (1959)

wmptm 1897

B. LESZCZYŃSKI (Warszawa)

O równaniu $n^x+(n+1)^y=(n+2)^z$

W. Sierpiński [2] dowiódł, że równanie $3^x+4^y=5^z$ ma w liczbach naturalnych x, y, z tylko jedno rozwiązanie $x=y=z=2$. Równanie to jest przypadkiem szczególnym równania

$$n^x+(n+1)^y=(n+2)^z. \tag{1}$$

TWIERDZENIE. *Równanie* (1) *ma w liczbach naturalnych* n, x, y, z, *gdzie* $y>1$, *tylko dwa rozwiązania*:

1° $n=1$, x *dowolne*, $y=3$, $z=2$;

2° $n=3$, $x=y=z=2$.

Dowód. Przypuśćmy, że liczby naturalne n, x, y, z spełniają równanie (1) i $y>1$.

Jeżeli $n=1$, to $1+2^y=3^z$. Otóż B. A. Hausmann [1] dowiódł, że liczby 2^m+1, gdzie $m>3$, nie są potęgami liczb naturalnych o wykładnikach większych od 1. Wynika stąd, że równanie $1+2^y=3^z$ ma w liczbach naturalnych y, z, gdzie $y>1$, tylko jedno rozwiązanie $y=3$, $z=2$.

Załóżmy więc, że $n>1$. Mamy

$$n \equiv n+2 \equiv (n+2)^z \equiv n^x+(n+1)^y \equiv 1 \pmod 2;$$

zatem dla $n=2n_1-1$, gdzie n_1 jest liczbą naturalną większą od 1, mamy

$$(2n_1-1)^x+(2n_1)^y=(2n_1+1)^z. \tag{2}$$

Obliczając reszty obu stron równania (2) modulo $2n_1$ otrzymujemy

$$(-1)^x \equiv 1 \pmod{2n_1},$$

skąd wobec $n_1>1$ wynika, że x jest parzyste, czyli $x=2x_1$. Obliczając reszty obu stron równania (2) modulo $(2n_1)^2$ mamy wobec $y>1$

$$-2x_1\cdot 2n_1+1 \equiv z\cdot 2n_1+1 \pmod{(2n_1)^2},$$

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

zatem

$$z+2x_1 \equiv 0 \pmod{2n_1},$$

czyli z jest parzyste: $z = 2z_1$.

Równanie (2) można przepisać w postaci

$$(3) \qquad (2n_1)^y = [(1+2n_1)^{z_1}+(1-2n_1)^{x_1}][(1+2n_1)^{z_1}-(1-2n_1)^{x_1}].$$

Przyjmijmy, że $n_1 = 2^{s-1}n_2$, gdzie s jest naturalne, n_2 — nieparzyste. Mamy

$$\left((1+2n_1)^{z_1}+(1-2n_1)^{x_1},\ n_2\right) = (2, n_2) = 1$$

i ze wzoru (3) wynika, że

$$(4') \qquad (1+2n_1)^{z_1}+(1-2n_1)^{x_1} = 2^a,$$

$$(4'') \qquad (1+2n_1)^{z_1}-(1-2n_1)^{x_1} = 2^{sy-a}n_2^y,$$

gdzie $a \geqslant 1$, $sy-a \geqslant 1$. Dodając i odejmując stronami równania (4') i (4'') otrzymujemy

$$(5') \qquad (1+2n_1)^{z_1} = 2^{a-1}+2^{sy-a-1}n_2^y,$$

$$(5'') \qquad (1-2n_1)^{x_1} = 2^{a-1}-2^{sy-a-1}n_2^y.$$

Z nieparzystości lewych stron wynika, że $a-1 = 0$ lub $sy-a-1 = 0$. Jeżeli $a-1 = 0$, $a = 1$, to $2^{a-1}-2^{sy-a-1}n_2^y < 1$; z (5'') wynika więc, że x_1 jest nieparzyste i

$$(6) \qquad (2n_1-1)^{x_1} = 2^{sy-2}n_2^y-1 = 2^{y-2}n_1^y-1.$$

Jeżeli $y = 2$, $n_1 = 2$, to $x_1 = z_1 = 1$, zatem $n = 3$, $x = y = z = 2$.

Jeżeli $y = 2$, $n_1 > 2$, to $(2n_1-1)^{x_1} = n_1^2-1$, co jest niemożliwe, ponieważ

$$2n_1-1 < n_1^2-1 < (2n_1-1)^2 \quad \text{dla} \quad n_1 > 2.$$

Jeżeli $y = 3$, to $(2n_1-1)^{x_1} = 2n_1^3-1$, co jest niemożliwe, ponieważ

$$(2n_1-1)^2 < 2n_1^3-1 < (2n_1-1)^3 \quad \text{dla} \quad n_1 > 1.$$

Zatem jeżeli $a = 1$, to $y \geqslant 4$ i obliczając reszty obu stron równania (6) modulo $(2n_1)^2$ otrzymujemy

$$2n_1x_1-1 \equiv 2^{y-2}n_1^y-1 \pmod{(2n_1)^2}, \qquad x_1 \equiv 2^{y-3}n_1^{y-1} \pmod{2n_1},$$

więc x_1 jest parzyste; otrzymaliśmy sprzeczność.

Pozostały do rozpatrzenia przypadek $sy-a-1 = 0$ daje $a = sy-1$; przy tym możemy założyć, że $a > 1$, gdyż przypadek $a = 1$ rozpatrzyliśmy poprzednio. Gdyby $s > 1$, to $2n_1 \equiv 0 \pmod 4$ i z (4') mielibyśmy

$2 \equiv 2^a \pmod 4$, co jest niemożliwe. Zatem $s=1$, $n_2=n_1$ i wzory (5′) i (5″) przybierają postać

$$(7') \qquad (1+2n_1)^{z_1} = 2^{y-2}+n_1^y,$$

$$(7'') \qquad (1-2n_1)^{x_1} = 2^{y-2}-n_1^y.$$

Gdyby y było parzyste, $y=2y_1$, to z (7′) otrzymalibyśmy

$$(1+2n_1)^{z_1} = (2^{y_1-1})^2+(n_1^{y_1})^2,$$

co jest niemożliwe, bo wobec $(n_1^{y_1}, 2^{y_1-1}) = (n_1, 2) = 1$ wszystkie dzielniki liczby $(n_1^{y_1})^2+(2^{y_1-1})^2$ są postaci $4k+1$, a $2n_1+1 \equiv 3 \pmod 4$. Jest więc y nieparzyste.

Ponieważ $2^{y-2}-n_1^y < 1$, więc z (7″) wynika, że również x_1 jest nieparzyste. Mamy więc

$$(8) \qquad (2n_1-1)^{x_1} = n_1^y-2^{y-2},$$

skąd, obliczając reszty obu stron modulo n_1, otrzymujemy

$$-1 \equiv -2^{y-2} \pmod{n_1};$$

zatem $n_1 \mid (2^{y-2}-1)$, $n_1 < 2^{y-2}$. Przyjmijmy $n_1-1 = 2^\beta t$, gdzie t jest nieparzyste. Z ostatniej nierówności wynika, że $\beta < y-2$, więc $2^{y-2} \equiv 0 \pmod{2^{\beta+1}}$. Ponadto

$$2n_1-1 = 2(2^\beta t+1)-1 = 2^{\beta+1}t+1 \equiv 1 \pmod{2^{\beta+1}},$$

$$n_1^y = (2^\beta t+1)^y \equiv 2^\beta ty+1 \pmod{2^{\beta+1}}.$$

Obliczając reszty obu stron równania (8) modulo $2^{\beta+1}$ otrzymujemy

$$1 \equiv 2^\beta ty+1 \pmod{2^{\beta+1}}, \qquad ty \equiv 0 \pmod 2,$$

co jest niemożliwe, ponieważ t i y są nieparzyste. Dowód jest zakończony.

Zagadnienie czy równanie (1) ma rozwiązanie dla $y=1$ pozostaje otwarte.

Prace cytowane

[1] B. A. Hausmann, The American Mathematical Monthly 48 (1941), str. 482.

[2] W. Sierpiński, *O równaniu* $3^x+4^y=5^z$, Wiadomości Matematyczne 2 (1956), str. 194-195.