ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE III (1959)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

B. ROKOWSKA (Wrocław)

O okresowych ciągach liczb naturalnych

Ciąg liczbowy $\{S_k\}$ nazywamy *okresowy*, jeżeli istnieją takie liczby m i t, że $S_k = S_{k+t}$ dla $k \geqslant m$. Oznaczmy przez $(c_1 c_2 \ldots c_n)$, gdzie $0 \leqslant c_i \leqslant 9$, liczbę

$$a = 10^{n-1}c_1 + 10^{n-2}c_2 + \ldots + c_n.$$

Przez $\bar{a}$ oznaczmy liczbę $(c_s \ldots c_2 c_1)$, gdzie $s \leqslant n$ oznacza największy wskaźnik i, przy którym $c_i \neq 0$. Niech a i b będą liczbami naturalnymi. Weźmy pod uwagę ciąg liczb $c(a, b) = \{S_k\}$, określony wzorami

$$S_1 = a, \qquad S_{n+1} = \overline{S}_n + b.$$

W. Sierpiński(1) postawił pytanie: dla jakich a i b tak określony ciąg $c(a, b)$ jest okresowy. W pracy tej udowodnimy

TWIERDZENIE. *Jeżeli liczba b jest potęgą liczby 2 albo liczby 5, to ciąg $c(a, b)$ jest ciągiem okresowym.*

LEMAT. *Nieograniczony ciąg liczb naturalnych $\{\sigma_n\}$ nie może spełniać następujących warunków:*

I. *Istnieje taka stała $C > \sigma_1$, że $\sigma_{n+1} - \sigma_n \leqslant 1$ dla $\sigma_{n+1} > C$.*

II. *Istnieje taka liczba naturalna $M > C+1$, iż dla każdej liczby m, dla której $\sigma_m = M > \sigma_{m-1}$, istnieje taka liczba $l(m)$, że $\sigma_{m+j} = M$ dla $0 \leqslant j < l(m)$ i $\sigma_{m+l(m)} < M$.*

Dowód lematu. Załóżmy, że ciąg nieograniczony $\{\sigma_n\}$ spełnia I i II. Jeżeli q jest najmniejszą liczbą taką, że $\sigma_{q+1} > C$, to mamy $\sigma_q < M$. Ponieważ $\{\sigma_n\}$ jest ciągiem nieograniczonym, więc z I wynika, że do tego ciągu należą wszystkie liczby $\sigma_q, \sigma_q+1, \sigma_q+2 \ldots$, a więc także liczba M. Ponieważ $\sigma_1 < M$, więc najmniejsza liczba m, dla której $\sigma_m = M$, jest większa od jedności. Zatem

$$\sigma_m = M > \sigma_{m-1}.$$

---

(1) Patrz W. Sierpiński, *Czym się zajmuje teoria liczb*, Warszawa 1957, str. 69.

Zgodnie z II mamy $\sigma_m = \sigma_{m+1} = \ldots = \sigma_{m+l(m)-1} = M$ i $\sigma_{m+l(m)} < M$. Ponieważ dalej te wyrazy ciągu, które są większe od C, wzrastają co najwyżej o 1, więc znów na podstawie II nie mogą nigdy przekroczyć M, co prowadzi do sprzeczności.

Dowód twierdzenia. Załóżmy, że ciąg $c(a,b) = \{S_k\}$ nie jest okresowy. Stąd łatwo wywnioskować, że jest nieograniczony. Oznaczmy przez σ_n ilość cyfr w rozwinięciu dziesiętnym S_n. Oczywiście ciąg $\{\sigma_n\}$ jest też nieograniczony. Tak więc otrzymamy sprzeczność, jeżeli wykażemy, że $\{\sigma_n\}$ spełnia warunki I i II lematu. Łatwo sprawdzić, że I zachodzi dla $C = 7\log(ba)$ (²). Niech $M > C+1$ będzie dowolną liczbą nieparzystą. Aby dowieść II, załóżmy, że $\sigma_m = M > \sigma_{m-1}$. Mamy wówczas

$$S_m = (c_1 c_2 \ldots c_n c_{n+1} \ldots c_{2n+1}) \quad \text{dla} \quad M = 2n+1,$$

gdzie $c_1 = 1$ i $(c_2 c_3 \ldots c_{2n+1}) < b$. Z $n > C/2$ otrzymujemy $b < 10^n$, skąd wynika, że $c_2 = c_3 = \ldots = c_{n+1} = 0$. Zdefiniujmy teraz liczbę $l(m)$ spełniającą warunek II naszego lematu. W tym celu wykażemy najpierw, że b dzieli 10^n. Ponieważ $b = 2^c$ lub 5^c, więc wystarczy dowieść, że $c \leqslant n$. Ostatnia nierówność wynika z następujących nierówności:

$$c \leqslant \log b/\log 2, \qquad 7\log b \leqslant C < 2n.$$

Niech liczba r spełnia równość $rb = 10^n$ i niech $d < 9$ oznacza taką liczbę, że 10 dzieli $(b+d+1)$. Udowodnimy, że $l(m)$ jest jedną z liczb $1, 2, \ldots$ $\ldots, 10^n dr+2$. W tym celu przyjmijmy dla tych j, dla których $\sigma_{m+j} = M$, następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} S_{m+j} &= (c_1^{(j)} \ldots c_n^{(j)} c_{n+1}^{(j)} c_{n+2}^{(j)} \ldots c_{2n+1}^{(j)}), \\ L_j &= (c_1^{(j)} c_2^{(j)} \ldots c_n^{(j)}), \qquad P_j = (c_{n+2}^{(j)} \ldots c_{2n+1}^{(j)}), \end{aligned} \qquad \text{gdzie} \quad c_k^{(0)} = c_k.$$

Załóżmy najpierw, że $\sigma_{m+j} = M$ dla $j = 0, 1, \ldots 10^n dr$. Wtedy

$$\begin{array}{lll} L_1 = \overline{P}_0, & c_{n+1}^{(1)} = 0, & P_1 = \overline{L}_0 + b, \\ L_2 = \overline{P}_1, & c_{n+1}^{(2)} = 0, & P_2 = P_0 + b, \\ L_3 = \overline{P}_2, & c_{n+1}^{(3)} = 0, & P_3 = \overline{L}_0 + 2b, \\ L_4 = \overline{P}_3, & c_{n+1}^{(4)} = 0, & P_4 = P_0 + 2b, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{2r-1} = \overline{P}_{2r-2}, & c_{n+1}^{(2r-1)} = 1, & P_{2r-1} = \overline{L}_0, \end{array}$$

(²) Używamy logarytmów dziesiętnych.

$$L_{2r} = L_0, \qquad c_{n+1}^{(2r)} = 2, \qquad P_{2r} = P_0,$$

. . . .

$$L_{10r-1} = \overline{P}_{10r-2}, \qquad c_{n+1}^{(10r-1)} = 9, \qquad P_{10r-1} = \overline{L}_0,$$

$$L_{10r} = L_0+1, \qquad c_{n+1}^{(10r)} = 0, \qquad P_{10r} = P_0,$$

. . . .

$$L_{10^n r} = L_0+10^{n-1} = 2\cdot 10^{n-1}, \qquad c_{n+1}^{(10^n r)} = 0, \qquad P_{10^n r} = P_0,$$

. . . .

$$L_{10^n dr} = (d+1)10^{n-1}, \qquad c_{n+1}^{(10^n dr)} = 0, \qquad P_{10^n dr} = P_0.$$

Z ostatniego układu równości wynika, że $c_{2n+1}^{(10^n dr+1)} \equiv d+b+1 \pmod{10}$, a zatem $c_{2n+1}^{(10^n dr+1)} = 0$. Stąd otrzymujemy $\sigma_{m+10^n dr+2} < M$, a więc mamy w tym przypadku $l(m) = 10^n dr+2$. Załóżmy teraz, że $\sigma_{m+j} \neq M$ dla pewnego $j \leqslant 10^n dr$, i niech j_0 będzie najmniejszą liczbą o tej własności. Wówczas spośród $10^n dr$ powyższych układów równości zachodzi pierwszych j_0-1, a więc mamy $\sigma_{m+j_0-1} = M$ i łatwo wywnioskować, że $\sigma_{m+j_0} < M$. W tym przypadku przyjmujemy $l(m) = j_0$.