ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE III (1959)

wmptm 1897

W. KOŁODZIEJ (Warszawa)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O zastosowaniu pewnej nierówności w teorii równań różniczkowych

Jednym z podstawowych twierdzeń w teorii równań różniczkowych jest twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązań od parametrów i od warunków początkowych. W tym artykule podamy prosty dowód tego twierdzenia. Jest on oparty na nierówności

$$|y_1(x)-y_2(x)| \leqslant \big(|y_1-y_2|+M|x_1-x_2|+\mu(b-a)\big)e^{L(b-a)}, \tag{1}$$

gdzie $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są odpowiednio rozwiązaniami równań różniczkowych

$$y' = f(x, y) \quad \text{i} \quad y' = f(x, y)+\varphi(x, y),$$

istniejącymi we wspólnym przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ i spełniającymi warunki początkowe

$$y_1(x_1) = y_1 \quad \text{i} \quad y_2(x_2) = y_2.$$

Zakładamy, że funkcje $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ są ciągłe w pewnym obszarze obejmującym obie krzywe całkowe i że

$$|f(x, y)| \leqslant M, \quad |\varphi(x, y)| \leqslant \mu.$$

Ponadto zakładamy, że funkcja $f(x, y)$ spełnia ze względu na zmienną y warunek Lipschitza ze stałą L, tzn. że

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leqslant L|y-\bar{y}|.$$

Z nierówności tej widać bezpośrednio, że gdy $\varphi(x, y) \equiv 0$, $x_2 \to x_1$, $y_2 \to y_1$, to $y_2(x)$ dąży w przedziale $[a, b]$ jednostajnie do $y_1(x)$. Podobnie gdy $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ i $\varphi_\alpha(x, y)$ dąży w rozważanym obszarze jednostajnie do zera przy $\alpha \to \alpha_0$, to $y_2(x)$ dąży do $y_1(x)$ jednostajnie w $[a, b]$. Warto też zauważyć, że dla $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ i $\varphi(x, y) \equiv 0$ z nierówności (1) wynika bezpośrednio twierdzenie o jednoznaczności w całym rozważanym przedziale $[a, b]$.

Pozostaje tylko udowodnić nierówność (1). Nierówność ta jest wariantem nierówności podanej w książce W. W. Niemyckiego i W. W. Stiepanowa[1] dla układów dynamicznych.

Dowód opiera się na prostym twierdzeniu pomocniczym:

Jeśli funkcja ciągła $u(x)$ *spełnia w przedziale* $[a, b]$ *nierówność*

$$|u(x)| \leqslant A\left(1+K\left|\int_{x_1}^{x}|u(t)|\,dt\right|\right) \quad (A>0, K>0, a\leqslant x_1\leqslant b), \tag{2}$$

to spełnia również nierówność

$$|u(x)| \leqslant Ae^{KA(b-a)}. \tag{3}$$

Dowód. Wprowadzając oznaczenie

$$v(x) = \int_{x_1}^{x}|u(t)|\,dt$$

mamy na podstawie (2) $v'(x) \leqslant A\left(1+Kv(x)\right)$, a stąd

$$v'(x)/\left(1+Kv(x)\right) \leqslant A \quad \text{dla} \quad x_1 \leqslant x \leqslant b.$$

Całkując tę nierówność w granicach od x_1 do x dostajemy

$$\ln\left(1+Kv(x)\right) \leqslant KA(x-x_1) \leqslant KA(b-a)$$

i stąd

$$1+Kv(x) \leqslant e^{KA(b-a)}.$$

Z ostatniej nierówności i z (2) wynika (3) dla $x_1 \leqslant x \leqslant b$. Dowód dla $a \leqslant x \leqslant x_1$ jest analogiczny.

Dowód nierówności (1). Mamy

$$y_1(x) = y_1+\int_{x_1}^{x} f\left(t, y_1(t)\right)dt, \qquad y_2(x) = y_2+\int_{x_2}^{x}\left[f\left(t, y_2(t)\right)+\varphi\left(t, y_2(t)\right)\right]dt.$$

Stąd

$$y_1(x)-y_2(x) = y_1-y_2+\int_{x_1}^{x} f\left(t, y_1(t)\right)dt-\int_{x_2}^{x}\left[f\left(t, y_2(t)\right)+\varphi\left(t, y_2(t)\right)\right]dt =$$

$$= y_1-y_2+\int_{x_1}^{x_2} f\left(t, y_2(t)\right)dt-\int_{x_2}^{x}\varphi\left(t, y_2(t)\right)dt+\int_{x_1}^{x}\left[f\left(t, y_1(t)\right)-f\left(t, y_2(t)\right)\right]dt.$$

---

[1] В.В. Немыцкий и В.В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва 1949.

Zatem

$$|y_1(x)-y_2(x)| \leqslant |y_1-y_2|+\Big|\int_{x_1}^{x_2}|f(t, y_1(t))|\,dt\Big| + \\ +\Big|\int_{x_2}^{x}|\varphi(t, y_2(t))|\,dt\Big|+\Big|\int_{x_1}^{x}|f(t, y_1(t))-f(t, y_2(t))|\,dt\Big|.$$

Stąd

$$|y_1(x)-y_2(x)| \leqslant |y_1-y_2|+M|x_1-x_2|+\mu(b-a)+L\Big|\int_{x_1}^{x}|y_1(t)-y_2(t)|\,dt\Big|.$$

Przyjmując

$$u(x) = y_1(x)-y_2(x), \quad A = |y_1-y_2|+M|x_1-x_2|+\mu(b-a)+\varepsilon \\ (\varepsilon > 0), \quad K = L/A,$$

dostaniemy (2) i, wobec udowodnionego twierdzenia pomocniczego,

$$|y_1(x)-y_2(x)| \leqslant \big(|y_1-y_2|+M|x_1-x_2|+\mu(b-a)+\varepsilon\big)e^{L(b-a)}.$$

Przechodząc w tej nierówności do granicy przy $\varepsilon = 0$ otrzymujemy (1).

Analogiczną nierówność można też stosować dla układów równań różniczkowych

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

W tym celu wygodnie jest wprowadzić oznaczenia wektorowe

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$y' = (y_1', y_2', \ldots, y_n'),$$
$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \quad \text{itd.}$$

Wtedy układ (4) można napisać w postaci

$$y' = f(x, y).$$

Przez moduł $|a|$ wektora $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ rozumiemy ogólnie sumę modułów współrzędnych $|a| = |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$.

We wszystkich przytoczonych poprzednio wzorach wielkości $y, \overline{y}$, $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, y_1 i y_2 należy traktować jako wektory, wszystkie zaś pozostałe jako skalary. W szczególności w twierdzeniu pomocniczym i w jego dowodzie występują wyłącznie wielkości skalarne.

Przy takiej interpretacji wszystkie poprzednie wzory, a w szczególności nierówność (1) i jej dowód, zachowują się bez zmiany dla układów równań.